18 Μαΐου

$$Ax_n = a(n)x_n \Rightarrow$$

$$\forall n \quad |a(n)| = \|a(n)x_n\| = \|Ax_n\| \leq \|A\|$$

άρα $a = (a(n))$ φραγμένη, $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

$$\sup|a(n)| \leq \|A\|$$

όμως $\exists\, x_n : \|x_n\| = 1 : \|Ax_n\| = |a(n)|$

άρα $\sup|a(n)| = \|A\|$

$$\forall x \in H: \quad x = \sum \langle x, x_n\rangle x_n$$

$$U : H \longrightarrow \ell^2$$

$$x \longmapsto (\langle x, x_n\rangle)$$

δηλ. $x_n \longmapsto e_n$

τότε U ισομετρία

διότι

$$\|Ux\|_2^2 = \sum |\langle x, x_n\rangle|^2 = \left\|\sum \langle x, x_n\rangle x_n\right\|^2 = \|x\|^2$$

επιπλέον, είναι επί

γιατί $U(H) \supseteq \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\supseteq [e_n : n \in \mathbb{N}] = c_{00}(\mathbb{N})$

πυκνός στον ℓ^2

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "U"] \arrow[d, "A"'] & \ell^2 \arrow[d] \\ H \arrow[r, "U"] & \ell^2 \end{tikzcd}$$

$x_n \longrightarrow e_n$

$a(n)x_n$

$$UAU^{-1}e_n = a(n)e_n$$

δηλ. $UAU^{-1} = D_a$

A διαγώνιος: $\exists\, (x_n)$ ON βάση του H

να $a(n) \in \mathbb{C}$:

$$Ax_n = a(n)\, x_n$$

$$\Downarrow$$

$$a = (a(n)) \in \ell^{\infty}$$

$\forall x \in H$: $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \quad \text{(σειρά συγκλ.)}$$

$$\Downarrow \text{ A φραγμ.}$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle A x_n$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$(A-\lambda)x = \sum \langle x, x_n \rangle (a(n)-\lambda) x_n$$

Για αν $\lambda \in \sigma_p(A)$ τότε $\exists\, x \neq 0$: $(A-\lambda)x = 0$

άρα $\langle x, x_n \rangle (a(n)-\lambda) = 0 \quad \forall n \quad (1)$

τότε θεωρώ $M = [x_n : a(n) = \lambda]$ κλ. υπόχ.

Ισχ. $M = M_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$

Απόδ. αν $x_n \in M$ τότε $(A-\lambda I)x_n = \underbrace{(a(n)-\lambda)}_{=0} x_n$

Αντίστροφα, αν $x \in M_\lambda$, $x \neq 0$

τότε ισχύει (1) άρα

$\forall m$: $a(m) \neq \lambda$, ισχύει $\langle x, x_m \rangle = 0$

άρα $x \perp [x_m : a(m) \neq \lambda] = M^{\perp}$

οπότε $x \in (M^{\perp})^{\perp} = M$

Αντίστροφα, υποθέτω ότι $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι ⊥ ανά δύο και παράγουν το χώρο

(: η κλ. γραμμική θήκη της $\bigcup M_\lambda$ είναι ο H)

τότε ισχ. ~~H~~ A διαγωνοποιήσιμος

- $\forall \lambda \in \sigma_p(A)\ \exists x_\lambda \in M_\lambda \setminus \{0\}$ και μπορώ $\|x_\lambda\| = 1$

$\{x_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ ορθοκανονική διότι $\{M_\lambda\}$ ⊥ ανά δύο

αφού H διαχ., αναγκαστικά η αριθμ.
(γιατί;)

οποία αρίθμηση $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$
λέω

ονομάζω $M_n = M_{\lambda_n}$, $P_n = P(M_n)$

$\{M_n\}$ κάθετοι ανά δύο: $P_n P_m = 0 \ \forall n \neq m$

$\{M_n\}$ ~~π~~ παράγει τον H:

$$\forall x \in H : \underbrace{x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x}_{} \quad (\text{η σειρά συγκλ.})$$

$$\Downarrow \ A \text{ φραγμ.}$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A \underbrace{P_n x}_{\in M_n}$$

$$A(P_n x) = \lambda_n (P_n x)$$

άρα $$\underbrace{Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x}_{}$$ ∎

$H = L^2([-\pi,\pi])$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

συν + 2π-περ

$K_f : H \to H$:

$\forall g \in C([-\pi,\pi])$

$$\rightsquigarrow \quad (K_f g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, \frac{dy}{2\pi}$$

ου ⟶ αρχη
2ε)

$$g(x) = e^{inx} = e_n(x)$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{(K_f e_n)(x)} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\underbrace{x-y}_{t})\, e^{iny}\, \frac{dy}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{in(x-t)}\, \frac{dt}{2\pi}$$

$$= e^{inx} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, \frac{dt}{2\pi} \right)$$

$$= e^{inx} \langle f, e_n \rangle = \underline{e^{inx} \hat{f}(n)}$$

$$\rightsquigarrow \quad K_f e_n = \hat{f}(n)\, e_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

βρήκα για ο.κ. βάση $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ από ιδιοδιανύσματα.

(για Δίση $(\hat{f}(n)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ άρα $\hat{f}(n) \to 0$ άρα K_f συμπαγής)

A φυσιολ. τελεστ.

$$Ax = \lambda x \iff A^* x = \bar{\lambda} x$$

Απόδ. $\|(A-\lambda)x\| = 0 \qquad \|(A-\lambda)^* x\| = 0$

ορίζω $B := (A - \lambda I)$: B φυσιολ.

τότε $\forall x, \|Bx\| = \|B^* x\|$

(ii) αν $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$ και $\lambda \neq \mu$ τότε $M_\lambda \perp M_\mu$

Απόδ. Έστω $x \in M_\lambda$, $y \in M_\mu$:
νδο $\langle x, y \rangle = 0$

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

$$= \langle x, A^* y \rangle = \langle x, \bar{\mu} y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

$$\Downarrow$$

$\langle x, y \rangle = 0$ αν $\lambda \neq \mu$

$A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ και $A^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

Απόδ. Ξέρω ότι $\forall M_\lambda$ είναι αναλλοίωτος

από $\forall B$ με $BA = AB$

άρα και από τον A^*

πιο απλά:

αν $x \in M_\lambda$ τότε $Ax = \lambda x$

$$\Downarrow$$

$$A^* x = \bar{\lambda} x \in M_\lambda$$

οπότε $A^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

Έστω $A \in B(H)$ φυσιολογικός σε διαχ. χώρο

$\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, $M_n = M_{\lambda_n}$

παρατηρώ $\forall n$, $A\big|_{M_n} = \lambda_n I_{M_{\lambda_n}}$

άρα, αν θεωρήσω $M = \bigvee_{n=1}^{\infty} M_n$

(= ο μικρότερος κλ. υπόχωρος του H που $\supseteq \forall M_n$)

τότε $A\big|_M$ είναι διαγωνοποιήσιμος

μπορώ άραγε νδο $M = H$;;

ή έστω $M \neq \{0\}$;;

Παράδ. $H = L^2([0,1])$

$(Af)(t) = t f(t)$, $t \in [0,1]$

φραγμ. αυτοσυζυγής

$(A^* f)(t) = t f(t)$

Ισχυρ. $\sigma_p(A) = \emptyset$ $\nexists \lambda (\in \mathbb{R})$

δηλ. δεν έχει να $Af = \lambda f$

δηλ. $t f(t) = \lambda f(t)$ $\forall t$

$(t-\lambda) f(t) = 0$ $\forall t$

$\Downarrow$; δες κόρσ!

$f = 0$ αν f συνεχής

Τι γίνεται όταν $f \in L^2$ αλλά όχι συνεχής;;

$A \in B(H)$, $M \subseteq H$ κλ. υπόχ., $P = P(M)$

(i) • $A(M) \subseteq M \iff AP = PAP$

(ii) • $A^*(M) \subseteq M \iff A(M^\perp) \subseteq M^\perp$

$\iff PA = PAP$

(iii) • $A(M) \subseteq M$ και $A^*(M) \subseteq M$

$\iff AP = PA$

<u>Απόδ</u> (i) $A(M) \subseteq M$ και $\forall x \in H$

$Px \in M$

άρα $APx \in A(M) \subseteq M$

άρα $APx \in M \Rightarrow P(APx) = APx$

άρα $PAP = AP$

αντίστροφα, αν $AP = PAP$

τότε $\forall x \in M$, όπου $Px = x$

έχουμε $Ax = APx = P(APx) \in M$

(ii) $A^*(M) \subseteq M \iff A^*P = PA^*P$

$\Downarrow (*)$

$P^*A = P^*AP^*$

δηλ

$PA = PAP$

Τώρα $P^\perp = I - P$ γιατί $P^\perp = P(M^\perp)$

$AP^\perp = A - AP$

$P^\perp A P^\perp = (I-P)(A-AP) = A - AP - PA + PAP$

$= A - AP$

$= AP^\perp$

Επίσης ~~τα~~ $A^*(M) \subseteq M \Rightarrow PAP = PA \Rightarrow$

$\Rightarrow AP^\perp = P^\perp A P^\perp$

$\Rightarrow A(M^\perp) \subseteq M^\perp$

Λόγω συμμετρίας: $A(M^\perp) \subseteq M^\perp \Rightarrow A^*(M) \subseteq M$

$A(M) \subseteq M$; $\quad A = \begin{array}{cc} M & M^\perp \end{array}$
$$A = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$A^*(M) \subseteq M$: $\quad A = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$

$\Updownarrow$

$A(M^\perp) \subseteq M^\perp$

άρα $A(M) \subseteq M$ και $A^*(M) \subseteq M \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

<u>ισοδύναμα</u> $AP = PA$

<u>Αφού</u> $A(M) \subseteq M \iff AP = PAP$

$A^*(M) \subseteq M \iff PA = PAP$

$A(M) \subseteq M$ και $A^*(M) \subseteq M \Rightarrow AP = PAP = PA$

$\Rightarrow AP = PA$

αντίστροφα, αν $AP = PA$

$\Downarrow$

$AP = APP = PAP \Rightarrow A(M) \subseteq M$

$PAP = PPA = PA \iff A^*(M) \subseteq M$

$A = A^*$ και συμπαγής

$$\Downarrow$$

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$$

$$\Downarrow$$

$\exists\, (x_n) : \|x_n\| = 1$ τ.ω. $|\langle Ax_n, x_n\rangle| \to \|A\|$

μπορώ να υποθ. $\lim_n \underbrace{\langle Ax_n, x_n\rangle}_{\in \mathbb{R}} \ \exists = \lambda \in \mathbb{R}$ έχω $|\lambda| = \|A\|$

Θέλω $\lambda \in \sigma_p(A)$

• Ισχυρ. $\|(A-\lambda)x_n\| \to 0$ ✓

$$\|(A-\lambda)x_n\|^2 = \langle (A-\lambda)x_n, (A-\lambda)x_n\rangle$$

$$= \|Ax_n\|^2 - \langle Ax_n, \lambda x_n\rangle - \langle \lambda x_n, Ax_n\rangle + \|\lambda x_n\|^2$$

$$= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda \langle Ax_n, x_n\rangle + |\lambda|^2$$

$$\leq \|A\|^2 - 2\lambda \langle Ax_n, x_n\rangle + \lambda^2 \to \|A\|^2 - \lambda^2 = 0$$

—— υ —— $(A = A^*)$

• (x_n) φραγμ., A συμπαγής

άρα $\exists\, (y_n)$ υπακ. της (x_n)

ώστε (Ay_n) συγκλίνει, έστω στο z

$$\left.\begin{array}{l} Ay_n - z \to 0 \\ Ay_n - \lambda y_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda y_n \to z$$

$$\Downarrow \qquad A \text{ φραγμ.}$$

$$\lambda A y_n \to Az$$

$$\downarrow$$

$$\lambda z$$

επομένως $Az = \lambda z$

θέλω $z \neq 0$

$$\langle z, z\rangle = \lim_n \langle Ay_n, \lambda y_n\rangle =$$

$$= \lambda \lim \langle Ay_n, y_n\rangle = \lambda^2 = \|A\|^2 \neq 0$$

OK

A συμπ., $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \dim M_\lambda < +\infty$

<u>Απόδ</u> $A\big|_{M_\lambda} = \lambda I_{M_\lambda}$ όμως αν $\dim M_\lambda = +\infty$

ο I_{M_λ} <u>όχι</u> συμπαγής

Αλλά $I_{M_\lambda} = A\big|_{M_\lambda} / \lambda$ συμπ

$\Rightarrow \dim M_\lambda < +\infty$

Αν $\{x_n\}$ ακολ. ορθ. ανάλογα διάν. και $Ax_n = \lambda_n x_n$ $\forall n$

τότε $\langle Ax_n, x_n \rangle = \lambda_n \|x_n\|^2 = \lambda_n$

A συμπ $\quad \downarrow$

0

A συμπ. + αυτοσ.(ω). τότε $\sigma_p(A)$ δεν έχει σημ. συσσ. $\neq 0$

<u>Αποδ</u> Αν όχι, $\exists \lambda \neq 0$ $\exists (\lambda_n)$: $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ με $\lambda_n \neq \lambda_m$ όταν $n \neq m$

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda$$

άρα $\forall \lambda_n \in \sigma_p(A)$

άρα $\exists x_n$, $\|x_n\| = 1$

$$A x_n = \lambda_n x_n$$

όμως A αυτοσ.(ω), $\lambda_n \neq \lambda_m \Rightarrow x_n \perp x_m$

άρα (x_n) είναι ορθοκανονική

άρα $\langle A x_n, x_n \rangle \longrightarrow 0$

$$\parallel$$

$\lambda_n \longrightarrow \lambda$ άτοπο.

Απόδειξη Φασματικού Θεωρ.: A συμμετρ. και συμπαγής

Υπόθεση $A = A^*$

Ξέρω ότι $\exists \lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| = \|A\|$

Επίσης $\sigma_p(A)$ είναι αριθμήσιμο και δεν έχει σημεία συσσώρ. $\neq 0$

Θεωρώ μια αρίθμηση του

$$\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$$

$$M_n = M_{\lambda_n}, \quad P_n = P(M_n)$$

Θέτω $M = \bigvee M_n$ Ξέρω τότε

ότι $\forall x \in M$ ισχύει $x = \sum_{n=1}^{\omega} P_n x$

άρα $Ax = \sum_{n=1}^{\omega} A P_n x$

$= \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n P_n x$

Μένει νδο $M = (\ker A)^\perp$

Φανερά $\cancel{\forall}\, M_{\lambda_n} \subseteq (\ker A)^\perp$

διότι αν $x \in M_{\lambda_n}$, και $y \in \ker A$

$Ax = \lambda_n x$

$$\lambda_n \langle x, y\rangle = \langle \lambda_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0$$

αλλά $\lambda_n \neq 0$ άρα $\langle x, y\rangle = 0$

$$\Rightarrow M = \bigvee M_\lambda \subseteq (\ker A)^\perp$$

Πρέπει νδο $(\ker A)^\perp \subseteq M$

ισοδύναμα

$\ker A \supseteq M^\perp$

δηλαδή αν $x \perp \bigvee M_{\lambda_n}$ τότε $Ax = 0$

$x \perp M$ οπότε $x \perp M_{\lambda_n}$, $\lambda_n \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$

$$A(M_{\lambda_n}) \subseteq M_{\lambda_n} \quad \forall \lambda_n$$

$$\Downarrow$$

$$A(M) \subseteq M$$

$$\Downarrow$$

$$A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$$

δηλ $A(M^\perp) \subseteq M^\perp$

$B = A\big|_{M^\perp} \in \mathcal{B}(M^\perp)$ έχω B συμπαγής και $B = B^*$

δηλ $\forall x \in M^\perp$
$\langle Bx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$

Αν $B \neq 0$ τότε $\exists \lambda$ ιδιοτιμή του B με $|\lambda| = \|B\|$
άρα $\lambda \neq 0$

οπότε $\exists x \in M^\perp$, $x \neq 0$

τ.ω. $Bx = \lambda x \neq 0$
$\parallel$
$Ax \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$

άρα $\lambda = \lambda_n$ για κάποιο n

για και $x \in M_{\lambda_n}$

όμως $x \perp M_{\lambda_n}$ άτοπο