14 Μαΐου

Μπονζούρ!

Σπουργιτούι : Grammiki Algebra

$A: E \to E$ γραμμ.

$M \subseteq E$ γραμμ. υπόχ.

<u>αναλλοίωτος</u> αν $A(M) \subseteq M$

<u>δηλ.</u> $\forall x \in M$, $Ax \in M$

<u>υπερ</u>αναλλοίωτος αν $\forall B: E \to E$ γραμμ.
με $AB = BA$
να έχω $B(M) \subseteq M$

$\not\Uparrow \Downarrow$
<u>αναλλ.</u>

Ανοιχτό <u>πρόβλημα</u> Αν H : Hilbert, διαχ. $A \in \mathcal{B}(H)$

∃? <u>κλειστός</u> υπόχ. $M \subseteq H$

με $A(M) \subseteq M$

και $M \neq \{0\}$ και $M \neq H$

Αργύρος + Haydon (>2000) : ∃ χώρος
Banach (απειροδιάστατος) E
όπου η απάντηση είναι ΝΑΙ
(: χώρος με "λίγους" τελεστές
δηλ. $\forall A \in \mathcal{B}(E)$: $A = K + \lambda I$
K συμπ., $\lambda \in \mathbb{C}$)

Acta Math., 206 (2011), 1–54
DOI: 10.1007/s11511-011-0058-y

A hereditarily indecomposable $\mathscr{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem

by

Spiros A. Argyros
National Technical University of Athens
Athens, Greece

Richard G. Haydon
Brasenose College
Oxford, U.K.

I. Chalendar and J. Partington: Modern Approaches to the invariant subspace problem, C.U.P. 2011

$M_\lambda = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

טענה חשובה מאוד: [illegible] אם $BA=AB$

אזי $B(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

הוכחה $x \in M_\lambda \iff (A-\lambda)x=0$

$$\Downarrow$$

$$(A-\lambda)(Bx) \underset{AB=BA}{=} \underbrace{B(A-\lambda)x}_{=0}$$

לכן $Bx \in M_\lambda$

$T: \ell^2 \to \ell^2 \qquad Te_n = \frac{1}{n} e_{n+1}$

$$T(x_1, x_2, \ldots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$$

$$\|$$

<u>Έστω</u>:

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots)$$

Τότε:

$\lambda x_1 = 0$

$\lambda x_2 = x_1$

$\lambda x_3 = \frac{x_2}{2}$

$\lambda x_4 = \frac{x_3}{3}$

$\vdots$

Αν $\lambda = 0$: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \frac{x_2}{2} = 0, \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$ μόνο

Αν $\lambda \neq 0$ $\quad x_1 = 0$

$$\Downarrow$$

$\lambda x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

κοκ

$x = 0$

μόνο

Άρα ο T <u>δεν</u> έχει ιδιοτιμές!

<u>Παρατ.</u> οι συντελεστές $\left(\frac{1}{n}\right)$ δεν παίζουν ιδιαίτερο ρόλο, αρκεί να είναι $\neq 0$

Γενικότερα, αν

$$T(x_1, x_2, \ldots) =$$

$$= (0, a(1)x_1, a(2)x_2, \ldots)$$

με $a(k) \neq 0 \ \forall k$: T δεν έχει ιδιοτιμές

<u>πχ</u> ο S δεν έχει ιδιοτιμές [Άσκηση!]

Ερώτηση: ο S^* ???

Αν $A: H \to H$ έχει μια <u>ΟΚ</u> <u>βάση</u>

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ από ιδιοδιανύσματα,

δηλ $\forall n$, $\exists\, a(n) \in \mathbb{C}$ ώστε

$$A x_n = a(n)\, x_n$$

τότε $A \overset{u}{\simeq} D_a$ όπου $a = (a(n))$

δηλ αν
$$\begin{aligned} U : H &\longrightarrow \ell^2 \\ x_n &\longrightarrow e_n \end{aligned}$$

ΟΚ βάση — ΟΚ βάση

(ο U είναι unitary)

και έχουμε:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "U"] \arrow[d, "A"'] & \ell^2 \arrow[d, "D_a"] \\ {} & {} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} x_n \arrow[d] & e_n \arrow[d] \\ a(n)x_n \arrow[r] & a(n)e_n \end{tikzcd}$$

δηλαδή

$$A = U^{-1} D_a U = U^{*} D_a U$$

(διότι $U^* = U^{-1}$)

Άρα: Κάθε διαγωνοποιήσιμος τελεστής A είναι φυσιολογικός δηλ $A^*A = AA^*$

διότι: $A = U^{-1} D_a U = U^* D_a U$

άρα $A^*A = (U^* D_a U)^* (U^* D_a U)$

$= (U^* D_a^* U)(U^* D_a U)$

$= U^* D_a^* \underbrace{(U U^*)}_{I} D_a U$

$= U^* D_a^* D_a U$

όμως ξέρουμε ότι $D_a^* D_a = D_a D_a^*$, άρα

$= U^* D_a D_a^* U = \dots =$

$= AA^*$

Αναγκαία συνθήκη για διαγωνοποίηση είναι $A^*A = AA^*$

Όταν H: $\dim H < \infty$, ισχύει και το αντίστροφο:

$\forall$ φυσιολογικός $A: H \to H$ είναι διαγωνοποιήσιμος

<u>Απόδ</u> Επειδή $\dim H < \infty$ και H <u>μιγαδικός</u>

ο A έχει ένα ιδιοδιάνυσμα, $x_1 \neq 0$
όπως μπορώ $\|x_1\| = 1$

$\exists\, a(1) \in \mathbb{C}$:

$$Ax_1 = a(1)x_1$$

τώρα θεωρώ τον $[x_1]^\perp$

παρατηρώ ότι $A: [x_1]^\perp \to [x_1]^\perp$ διότι $A^*A = AA^*$

όχι πάντα! $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $[e_1]$ ιδιόχωρος

$[e_1]^\perp = [e_2]$

$A(e_2) = e_1 + 2e_2 \notin [e_2]$: όχι A-αναλλ

<u>απόδ</u> Αν $y \in [x_1]^\perp$

$$\langle Ay, x_1 \rangle = \langle y, A^*x_1 \rangle \overset{?}{=} 0$$

<u>Ισχ</u> $A^*x_1 = \overline{a(1)}x_1$. Πράγματι:

$$\|A^*x_1 - \overline{a(1)}x_1\| = \|\underbrace{(A - \overline{a(1)}I)^*}_{\text{φυσι}} x_1\| = \|(A - a(1)I)x_1\| = 0$$

Έδειξα ότι:

$$\langle Ay, x_1 \rangle = \langle y, A^*x_1 \rangle = \langle y, \overline{a(1)}x_1 \rangle = 0$$

άρα $Ay \in [x_1]^\perp$

$$
A \sim \begin{array}{c} \\ \end{array}
\begin{array}{cc} x_1 & [x_1]^{\perp} \\
\left[\begin{array}{c|cccc} a(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & \tilde{A} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \end{array}
= \left[\begin{array}{cc|c} a(1) & 0 & \\ 0 & a(2) & \\ \hline \vdots & \vdots & a(3) \\ & & \ddots \end{array}\right]
$$

Οπότε εξετάζω τον: $A\big|_{[x_1]^{\perp}} : [x_1]^{\perp} \to [x_1]^{\perp}$

και αυτό έχει ένα ιδιοδιάνυσμα

x_2, $\|x_2\| = 1$

μετά καλώ $[x_1, x_2]^{\perp}$ κ.ο.κ.

διαδοχικές διαγωνοποιήσεις του A

μετά από n-βήματα έχω μια

ορθ. βάση $\{x_1 \dots x_n\}$ του A

από ιδιοδιανύσματα

Χρησιμοποιήσαμε το:

δεν χρειάζεται να το αποδείξετε

<u>Λήμμα</u> Αν $AA^* = A^*A$ και λ ιδιοτιμή του A

τότε το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^*

[Παρατήρηση:

ο M_λ είναι αναλλοίωτος (από το A)

<u>και</u> από το A^*

διότι ο M_λ είναι υπεραναλλοίωτος]

<u>Απόδ Λήμματος:</u> Έστω $x \in M_\lambda$, τότε $x \in \ker(A - \lambda I)$

(Τζουάννη)

όμως $\underbrace{A - \lambda I}_{B}$ φυσιολογικός.

άρα ισχύει $\|B^* x\| = \|Bx\| = 0$

$$\left(\|B^* x\|^2 = \langle B^* x, B^* x \rangle = \langle B B^* x, x \rangle \right.$$

$$\left. = \langle B^* B x, x \rangle = \langle Bx, Bx \rangle = \|Bx\|^2 \right)$$

με άλλα λόγια, $B^* x = 0$ δηλ $(A^* - \bar{\lambda} I)x = 0$

δηλ $A^* x = \bar{\lambda} x$

$\blacksquare$

Επέκταση σε απειροδιάστατους χώρους

Χρειάζονται: (1) να περιοριστώ σε $A \in B(H)$ που <u>έχουν</u> ιδιοτιμές

(2) να πετύχω μια επαγωγική διαδικασία που ακολουθώντας να οδηγεί σε ορθοκανονική <u>βάση</u> του χώρου

<u>Όμως</u> $\exists\, T$ συμπαγής χωρίς ιδιοτιμές αλλά δεν είναι αυτοσυζυγής

<u>Θέλω να</u> κάθε <u>συμπαγής + αυτοσυζυγής</u> A έχει ιδιοτιμές

Μάλιστα $\exists\, \lambda \in \sigma_p(A)\,;\ |\lambda| = \|A\|$

(2) Οι ιδιοτιμές αποτελούν πεπερασμένη, ή το πολύ μηδενική ακολουθία.

(3) Ο H σπάει σε ευθύ άθροισμα $H = H_1 \oplus H_2$ ώστε $A(H_i) \subseteq H_i$ και ο $A|_{H_1}$ διαγωνοποιείται ενώ ο $A|_{H_2}$ μηδενίζεται.