27 Απριλίου

$P = P^* = P^2$

P, Q προβολές (ορθές)

$\rightsquigarrow$: PQ προβ $\iff PQ = QP$

$\Downarrow$

$(PQ)^* = PQ$

$\|$

$Q^* P^*$

$\|$

QP

Αντίστροφα, αν $PQ = QP$ τότε

(i) $(PQ)^* = Q^* P^* = QP = PQ$

και (ii) $(PQ)^2 = PQPQ = P^2 Q^2$
$= PQ$

Όταν $PQ = QP$ τότε $PQ = P(M \cap N)$

διότι $\forall\, x \in M \cap N$ τότε $PQx = P(x) = x$

$\uparrow$ $x \in N$ $\uparrow$ $x \in M$

Αντίστροφα αν $x = PQx$, τότε:

$x = PQx = P(Qx) \in \mathrm{im}P = M$

$\|$ $\|$

$Q\,x = Q(Px) \in \mathrm{im}Q = N$

άρα $x \in M \cap N$.

- $M \perp N \Rightarrow PQ = 0$

Πράγματι, $\forall x \in H$, $Qx \in N$ άρα $Qx \perp M$

άρα $P(Qx) = 0$

- $PQ = 0 \Rightarrow P|_N = 0$

πράγματι, αν $x \in N$, τότε $x = Qx$

$Px = PQx = 0$

- $P|_N = 0 \Rightarrow M \perp N$

πράγματι, $P|_N = 0 \Rightarrow$

$$N \subseteq \operatorname{Ker} P = M^\perp$$

$\Rightarrow N \subseteq M^\perp$

δηλ. $N \perp M$

P, Q προβολές

$S = P + Q$ προβολή $\iff$ $PQ = 0$

$S = P + Q$ προβολή $\implies$ $S = S^2$

δηλ. $(P+Q)^2 = P + Q$

$$\| $$

$$P^2 + PQ + QP + Q^2$$

$$\| $$

$$P + PQ + QP + Q$$

$$\Updownarrow$$

$$PQ + QP = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$PQP + QP^2 = 0 \qquad\qquad P^2Q + PQP = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$PQP + QP = 0 \qquad\qquad PQ + PQP = 0$$

$$\Downarrow$$

$PQ = QP$ και $PQ + QP = 0$

$$\Downarrow$$

$PQ = 0$ (∃ απλούστερος τρόπος...)

αντίστροφα, αν $PQ = 0$

νδο $S = P + Q$ προβολή

(i) $S^* = (P^* + Q^*) = P + Q = S$

(ii) $S^2 = (P+Q)^2 = P^2 + 0 + 0 + Q^2 = S$

Τότε, $\operatorname{im}(P+Q) = M+N$

<u>Απόδ.</u> αν $\forall x \in H$, ισχύει $(P+Q)x = Px + Qx \in M+N$

αν $x \in M+N$ νδο $x = (P+Q)x$

$\exists x_1 \in M \ \ \exists x_2 \in N$ (μοναδικά διότι $M \perp N$)

ώστε $x = x_1 + x_2$

οπότε $(P+Q)x = (P+Q)x_1 + (P+Q)x_2$

$$= \underbrace{Px_1}_{= x_1} + \underbrace{Qx_1}_{= 0} + \underbrace{Px_2}_{= 0} + \underbrace{Qx_2}_{= x_2}$$

(διότι $M \perp N$)

άρα $(P+Q)x = x$

Άσκ. M, N κλ. υποχ. $\subseteq H$ Hilbert

υποθ. $\underline{\dim N < +\infty}$

$\Longrightarrow$ $M+N$ κλειστός

$M+N = \{x+y : x \in M, y \in N\}$ (πάντα γραμ.)

Δηλ. ότι $z \in \overline{M+N}$ ν.δ.ο. $\exists\, x \in M, y \in N$ ώστε $z = x+y$

$z \in \overline{M+N} \iff \exists\, (z_n),\ z_n \in M+N$ με $z_n \to z$

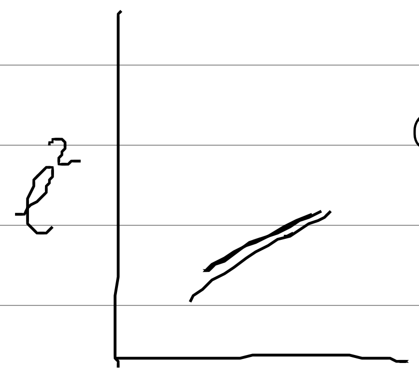
Τότε $\forall n,\ \exists\, x_n \in M,\ y_n \in N$ ώστε $z_n = x_n + y_n$

Η (z_n) συγκλίνει. Αλλά γιατί η (x_n) συγκλίνει;

Παράδ. $H = \ell^2 \oplus \ell^2 = \{(x,y) : x \in \ell^2, y \in \ell^2\}$

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle = \langle x,x'\rangle + \langle y,y'\rangle$$

: χώρος Hilbert (άσκηση)



ορίζω: $M = \{(x,0) : x \in \ell^2\}$

$N = \{(x, D_a x) : x \in \ell^2\}$

όπου $(D_a x)(n) = \left(\frac{1}{n} x(n)\right)$

Ισχυρ. M, N κλειστοί υπόχ.

$M+N$ όχι κλειστός

Απόδ. Γενικότερα, $N = \{(x, Ax) : x \in \ell^2\}$

$A : \ell^2 \to \ell^2$ φραγμ. τελ.

(i) M κλειστό : άσκηση $(x_n, 0) \to (x,y)$

$$\Downarrow$$

$x_n \to x$

και $y = 0$

(ii) N κλειστό (ασκ. Γ φραγμ.)

Έστω $(x,y) \in \overline{N}$

τότε $\exists (x_n, y_n) \in N : (x_n, y_n) \to (x,y)$

$\Longleftrightarrow x_n \to x$ και $y_n \to y$

όμως $(x_n, y_n) \in N$ άρα $y_n = A x_n$

A φραγμ.: $\downarrow$

Ax

άρα $(x,y) = (x, Ax) \in N$

Εξετάζω πότε $M+N$ κλειστό

$$M+N = \{ \xi + \eta ,\ \xi \in M,\ \eta \in N \}$$

$$= \{ (x,0) + (y, Ay) : x \in \ell^2, y \in \ell^2 \}$$

$$= \{ (x+y, Ay) : x, y \in \ell^2 \}$$

$$= \{ (z, Ay) ,\ z, y \in \ell^2 \}$$

Πότε $M+N = \overline{M+N}$;;

$$\underset{(x,y)}{\xi} \in \overline{M+N} \iff \exists (z_n, Ay_n) \in M+N \longrightarrow (x,y)$$

δηλ.) $z_n \longrightarrow x$

$Ay_n \longrightarrow y$ Θέλω $(x,y) \in M+N$ οπότε πρέπει $y = Ay'$

δηλ.) $y \in imA$

αυτό ισχύει $\iff$ imA κλειστό

(δηλ. $Ay_n \longrightarrow y$ άρα $y \in \overline{imA}$)

Όμως, αν $A = D_a$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$

τότε $\operatorname{im} A$ <u>όχι</u> κλειστό

<u>Πχ</u> αν $y = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$

ισχυρίζομαι $y \notin \operatorname{im} D_a$

<u>δηλ</u> $\nexists\, x \in \ell^2 : y = D_a x$

γιατί θα έπρεπε $y(n) = \frac{1}{n} x(n)$ $\forall n$

$x(n) = n\, y(n)$ $\forall n$

$= 1$ $\forall n$

$\Rightarrow x \notin \ell^2$

όμως αν θέσω $x_n = (1, 1, 1, \dots, \overset{n}{\overset{\downarrow}{1}}, 0, 0, 0)$

$x_n \in \ell^2$

$D_a x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$

$D_a x_n \longrightarrow \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$

$= y$

άρα $y \in \overline{\operatorname{im} D_a} \setminus \operatorname{im} D_a$

<u>Συμπέρασμα</u>: ΜτΝ όχι κλειστό.

$\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\perp$ ανά δύο δηλ., $\mathrm{im}(P_n) = M_n$

M_n : κλειστοί υπόχωροι

και $n \neq m \Rightarrow M_n \perp M_m$.

$M_1 + M_2$ κλ υποχ $P(M_1+M_2) = P_1 + P_2$

$(M_1+M_2) \underset{\perp}{+} M_3$ κλ $P(M_1+M_2+M_3) =$

$P(M_1+M_2) + P(M_3) = P_1 + P_2 + P_3$

Επαγωγικά, $\forall n$,

$$P(M_1+M_2+\dots+M_n) = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

και $\forall x \in H$ $\|P(M_1+\dots+M_n)x\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=}$

$$\|P_1(x)\|^2 + \|P_2 x\|^2 + \dots + \|P_n x\|^2$$

Θέτω $N_n = M_1 + \dots + M_n$

και $Q_n = P(N_n) = P_1 + P_2 + \dots + P_n$

οπότε $N_n \subseteq N_{n+1}$ $\forall n$

$\Downarrow$

άρα $Q_n \leq Q_{n+1}$ $\forall n$

<u>Ισχ</u> $\forall x \in H$, η $(Q_n x)$ συγκλίνει στο Qx
όπου Q προβολή στα
$N = \overline{\bigcup N_n}$
$= \overline{[\bigcup N_n]}$

<u>γιατί</u> αφού $N_n \subseteq N_{n+1}$ $\forall n$

η $\bigcup N_n$ είναι γραμμ. χώρος.
(γενικά $N \cup M$ όχι γραμμ. χώρος: $\frac{N}{M}$)

<u>Αποδ</u>:
αν $x, y \in \bigcup N_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$

τότε $\exists n_1, n_2$: $x \in N_{n_1}$, $y \in N_{n_2}$

όμως: $N_{n_i} \subseteq N_k$ $k = \max(n_1, n_2)$

άρα $x, y \in N_k$ άρα $x + \lambda y \in N_k$
οπότε $x + \lambda y \in \bigcup N_n$.

Αποδ

Έστω $y \in \bigcup_\nu N_n$ τότε $\exists n_0$: $y \in N_{n_0}$

$\left(Q = \pi\rho o\beta\, \overline{\bigcup N_n}\right)$

άρα $\forall n \geq n_0$, $y \in N_n$

άρα $\forall n \geq n_0$, $Q_n y = y$

άρα $\lim_{n\to\infty} Q_n y = y$.

Γενικά, αν $x \in H$ τότε $Qx \in \overline{\bigcup N_n}$

άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in \bigcup N_n$: $\|Qx - y\| < \varepsilon/2$

από το πρώτο, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$, $Q_n y = y$

άρα $\|Qx - Q_n x\| \leq \|Qx - y\| + \|y - Q_n y\|$
$+ \|Q_n y - Q_n x\|$

όμως, $N_n \subseteq \overline{\bigcup N_n}$ άρα
$Q_n \leq Q \Rightarrow Q_n Q = Q_n$

$\|Qx - Q_n x\| \leq \|Qx - y\| + 0 + \|Q_n y - Q_n Qx\|$

$< \varepsilon/2 + 0 + \|Q_n\| \|y - Qx\|$

$< \varepsilon/2 + 0 + 1 \cdot \varepsilon/2$ ∎

[Παρατήρηση : $\|(Q-Q_n)x\| \to 0 \ \forall x$ αλλά όχι
$\|Q-Q_n\| \to 0$ εν γένει!

Διότι:

$$Q_n \leq Q \quad \text{άρα} \quad Q_n = QQ_n$$

άρα $Q - Q_n = Q - QQ_n = Q(I - Q_n) \not\to 0$

εκτός αν $=0$ από ένα n_0 και πέρα

διότι αν $Q_n \neq Q \ \forall n$,

$$\exists \, y_n \in \operatorname{im} Q \quad \|y_n\| = 1$$

$$y_n \perp \operatorname{im} Q_n \quad \text{άρα}$$

$$\|Q(1 - Q_n) y_n\| = \|y_n\| \not\to 0 \;]$$

Επανέρχομαι στην $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $\{M_n\}$ $\perp$ ανά δύο:

ορίζω $Q_n = P_1 + \dots + P_n$

τότε $(Q_n) \nearrow$ οπότε

$\forall x \in H$, $Q_n x \to Qx$ όπου

$$Q = \text{προβ}\left(\overline{\bigcup N_n}\right) \qquad N_n = M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

$$= \text{προβ}\left(\left[\bigcup M_n\right]\right)$$

άρα $\lim_{n\to\infty} Q_n x = Qx \quad \forall x$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_k x = Qx$$

δηλ: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P_k x = Qx$

Επίσης $\forall n$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} P_k x \Big\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} P_k x \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2$$

דג אם נגדיר $M_n = [e_n]$

אזי $P_n(x) = \langle x, e_n \rangle e_n$

ולכן $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| P_n x \|^2$

$\Downarrow$

$$\left\| \sum \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum |\langle x, e_n \rangle|^2$$

(Parseval)