Χρόνια Πολλά σε όλους Γιώργους της Γεωργίας και όλους τους εορτάζοντες

$\emptyset \neq E \subseteq H$ όπου H Hilbert.

$E^{\perp} = \{x \in H : x \perp y \;\; \forall y \in E\}$

$\langle x, y \rangle = 0$ "

$E^{\perp}$ πάντα κλειστός γραμμικός υπόχ.

<u>Άσκ</u> $\overline{[E]} = (E^{\perp})^{\perp}$

<u>Αποδ</u>

$E \subseteq (E^{\perp})^{\perp}$:

για αν $x \in E$ και $\forall y \in E^{\perp}$ ισχύει $x \perp y$

$\Downarrow$ ($E^{\perp\perp}$ γραμμ)

$[E] \subseteq (E^{\perp})^{\perp}$

$\Downarrow$ ($E^{\perp\perp}$ κλειστός)

$\overline{[E]} \subseteq E^{\perp\perp}$

$=?$

αν όχι, $\exists\, y \in (E^{\perp})^{\perp}$ και $y \perp \overline{[E]}$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$y \perp E^{\perp}$ $\qquad\qquad$ $y \perp E$

$\Downarrow$

$y \in E^{\perp}$

$y \perp y \Rightarrow y = 0$

$\blacksquare$

$\|P_M\| \leq 1$ και $\|P_M\| = 1$ αν $M \neq \{0\}$

$$x = x_M + x_{M^\perp}$$

$(I - P_M)x = x_{M^\perp}$ άρα $I - P_M$ είναι η προβ. στον $M^\perp$

$$\Downarrow \quad \|I - P_M\| \leq 1$$

Ισχύς: x_M είναι το πλησιέστερο προς το x διαν. του M

Δηλ. $\forall y \in M$: $\|x - y\| \geq \|x - x_M\|$

Απόδ. $\|x - x_M\| = \|x - P_M x\|$

$$= \|(I - P_M)x\|$$

αλλά: $\forall y \in M$: $(I - P_M)y = y - P_M y = 0$

$$= \|(I - P_M)(x - y)\|$$

$$\leq \|x - y\|$$

P προβολή, $P^2 = P$

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$: $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P) \overset{?}{\Longrightarrow} \|P\| \leq 1$

$$\forall x \in H: \quad x = \underset{\substack{\Uparrow \\ \operatorname{im}P}}{Px} \overset{\perp}{+} \underbrace{x - Px}_{\in \ker P}$$

διότι:

$$P(x - Px) = Px - P^2 x = 0$$

Πυθ $\Downarrow$

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geq \|Px\|^2$$

$\forall x$, $\|Px\| \leq \|x\|$ άρα $\|P\| \leq 1$

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$: $\|P\| \leq 1$ νδο P = ορθ προβ στην $\operatorname{im} P$

Θέτω $M = \operatorname{im} P$ νδο $(\ker P)^\perp = M$

$x \in (\ker P)^\perp$ νδο $x \in M$

$x = Px + (I - P)x$ όμως $(I - P)x \in \ker P$

άρα $x \perp (I - P)x$

$\Downarrow$

Πυθ $\quad \|x\|^2 + \|\underbrace{(I - P)x}_{\downarrow}\|^2 = \|x - (I - P)x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2$ $\quad (\|P\| \leq 1)$

$\Rightarrow \|(I - P)x\|^2 = 0$

$(I - P)x = 0$ άρα $x = Px$ άρα $x \in M$. ∎

$(\ker P)^\perp \subseteq M$

νδο $=$

αν όχι, τότε

$\exists\, y \in M$ ($y \neq 0$) και $y \perp (\ker P)^\perp$

άρα $y \in M$ και $y \in (\ker P)^{\perp\perp}$

$\| $

$\ker P$

διότι P προβ $+ \|P\| \leq 1$

άρα $y \in \ker P$, $y \in M = \operatorname{im} P$

$y \in (\ker P \cap \operatorname{im} P) = \{0\}$ άτοπο

$$\left(\left. \begin{array}{l} y = Py \\ \text{και } Py = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \right)$$

$P \in B(H)$, $P = P^2 \neq 0$

(α) P είναι ορθή προβολή στο imP καλύτερο

$\Downarrow$

(β) $P \geq 0$

Δηλ. $\forall x \in H$, $\langle Px, x \rangle \geq 0$

Απόδ: $Px \in imP$ και $(I-P)x \in \ker P$

άρα ισχύει $Px \perp (I-P)x$

$$\langle Px, (I-P)x \rangle = 0$$

$$\langle Px, x \rangle - \langle Px, Px \rangle = 0$$

$$\boxed{\langle Px, x \rangle = \langle Px, Px \rangle = \|Px\|^2 \geq 0}$$

Μάντι! αν P φυσ, τότε είναι ορθ. προβ.

$\Downarrow$

πρώτο $\forall x \quad \|Px\| = \underbrace{\|P^*x\|}$

$$\left(\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle P^*Px, x \rangle \right.$$

$$\| \text{φυσ}$$

$$\left. \|P^*x\|^2 = \langle P^*x, P^*x \rangle = \langle PP^*x, x \rangle \right)$$

άρα $Px = 0 \iff P^*x = 0$

Έστω $x \in \ker P$, $y \in \operatorname{im} P$; $\exists z \in H$ ώστε $y = Pz$

$\Downarrow$

$\langle x, y \rangle = \langle x, Py \rangle \qquad Py = P^2 z = Pz = y$

$\|$

$\langle P^*x, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$

άρα $\ker P \perp \operatorname{im} P$

$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{ P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : P = P^2 = P^* \}$: ορθ προβ

$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ = κλειστοί υποχ του $\mathcal{H}$

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

$$M \longrightarrow P_M$$

$$\operatorname{im} P \longleftarrow P$$

$= \ker(I-P)$: κλειστός, αφού $I-P$ συνεχής

διότι $x \in \operatorname{im} P \Longleftrightarrow \exists z : x = Pz$

$$\Uparrow \quad \Downarrow$$

$$Px = x$$

$$\Uparrow \quad \Downarrow$$

$$(I-P)x = 0$$

$$\{0\} \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{H} \longrightarrow I$$

$$M^{\perp} \longrightarrow (I - P_M)$$

P, Q ορθ προβ

$$P \le Q \overset{\text{ορ}}{\iff} \forall x,\ \langle Px, x\rangle \le \langle Qx, x\rangle$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \langle Px,x\rangle = \|Px\|^2 \qquad \langle Qx,x\rangle = \|Qx\|^2$$

$$\langle (Q-P)x, x\rangle \ge 0 \quad \forall x$$

• ; $P \le Q \iff \|Px\| \le \|Qx\| \ \forall x$

• $\|Px\| \le \|Qx\| \ \forall x \implies \operatorname{im}P \subseteq \operatorname{im}Q$

<u>Απόδ</u>:

Έστω $x \in \operatorname{im}P$ οπότε $x = Px$ από

άρα: $\|x\| = \|Px\| \le \|Qx\| \le \|x\|$

$$\implies \|Qx\| = \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{Qx = x} \qquad \text{άρα } x \in \operatorname{im}Q$$

(διότι

$$x = Qx + (I-Q)x$$

$$\downarrow$$

$$\|x\|^2 = \|Qx\|^2 + \|(I-Q)x\|^2$$

$$= \|x\|^2 + \|(I-Q)x\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|(I-Q)x\| = 0 \implies x - Qx = 0$$

άρα $x = Qx$)

[illegible] $\underline{\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q}$

[illegible] $\forall x \in H: \quad Px \in \operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$

[illegible] $Q(Px) = Px \implies \underline{QP = P}$

$$QP = P \overset{(*)}{\implies} P = P^* = (QP)^* = P^* Q^* = PQ$$

[illegible] $QP = P \implies PQ = P$

$$PQ = P \implies \|Px\| \leq \|Qx\| \quad \forall x$$

[illegible]: $\forall x, \quad \|Px\| = \|PQx\| \leq \|Qx\|$

$$\Updownarrow$$

$$P \leq Q$$