Γραμμικοί Τελεστές (712)
Ασκήσεις II
9 Απριλίου 2015

Άσκηση 1 Αν H είναι χώρος Hilbert, εξετάστε αν το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle\ H\times H\to\mathbb{K}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (ως προς τη κάποια μετρική γινόμενο στον $H\times H$).

Άσκηση 2 Αν $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δείξαμε ότι η πλήρωσή του είναι ισομετρικά ισόμορφη με έναν υπόχωρο H του χώρου H_1 των συνεχών αντιγραμμικών μορφών $f:E\to\mathbb{C}$. Εξετάστε αν ισχύει ισότητα $H=H_1$.

Άσκηση 3 Έστω $t_0\in[0,1]$. Εξετάστε αν η απεικόνιση $(C([0,1]),\|\cdot\|_2)\to(\mathbb{K},|\cdot|):f\to f(t_0)$ είναι συνεχής.

Άσκηση 4 Αν $H=L^2([0,1])$, δείξτε ότι για κάθε $f\in C([0,1])$, όπου $M_f(g)=fg$ $(g\in C([0,1])$, ισχύει $\|M_f\|=\|f\|_\infty$. Δείξτε επίσης ότι ο M_f είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(t)\in\mathbb{R}$ για κάθε $t\in[0,1]$.

Άσκηση 5 (α) Εξετάστε αν υπάρχει $T\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ με $T^2e_1=e_2$ και $T^2e_2=0$.
(β) Υπάρχει $T\in\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ ώστε $T^2=S$ (δηλ. $T^2e_n=e_{n+1}$ για κάθε n); [Υπόδειξη: Ποιός είναι ο $\ker S^*$ και ο $\ker T^*$;]

Άσκηση 6 (α) Αν $f\in C([0,1])$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ ορίζω $\hat f(k)=\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt$. Δείξτε ότι η $f\to\hat f(k)$ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής (άρα επεκτείνεται στον $L^2([0,1])$).

(β) Θεωρούμε τον χώρο $H^2:=\{f\in L^2([0,1]):\hat f(k)=0\ \forall k<0\}$. Δείξτε ότι είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2([0,1])$.

(γ) Για κάθε $g\in H^2$ θέτουμε $Tg=M_hg$ όπου $h(t)=e^{2\pi it}$ (δηλαδή $(Tg)(t)=e^{2\pi it}g(t)$). Δείξτε ότι ο T απεικονίζει τον H^2 στον H^2 και βρείτε τον συζυγή τελεστή $T^*:H^2\to H^2$.

Άσκηση 7 Αν $k:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, θέτουμε

$$(A_kf)(x)=\int k(x,y)f(y)dy,f\in C([0,1]).$$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση A_kf είναι συνεχής στο $[0,1]$. Να εξετασθεί αν ισχύει $\|A_k\|=\|k\|_{22}$. [Υπόδειξη: Θεωρείστε, για παράδειγμα, k της μορφής $k(s,t)=f_1(s)g_1(t)+f_2(s)g_2(t)$ όπου τα $\{f_1,f_2\}$ και $\{g_1,g_2\}$ είναι κατάλληλα ορθοκανονικά ζεύγη.]

Άσκηση 8 Αν H είναι ένας οποιοσδήποτε χώρος Hilbert με $\dim H>1$, να βρεθεί ένας $T\in\mathcal{B}(H)$ που δεν είναι φυσιολογικός.