Ενέλιξη (Involution) : (2 Απριλίου)

$\forall\ T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ φρ γε)

$\exists!\ T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \ : \ \langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1$

$\forall x \in \mathcal{H}_1,\ y \in \mathcal{H}_2$

δηλ. έχω απεικόνιση :

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$$

$$T \longrightarrow T^*$$

(1) αντιγραμμική

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$$

Αποδ: $y \in \mathcal{H}_2,\ x \in \mathcal{H}_1$

$$\langle (\lambda T)^* y, x\rangle_1 \overset{\text{oρ}}{=} \langle y, \lambda T x\rangle_2 = \bar{\lambda}\langle y, Tx\rangle$$

$$= \bar{\lambda}\langle T^* y, x\rangle = \langle \bar{\lambda} T^* y, x\rangle$$

$\forall x, y$; άρα

$$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

και εύκολα: $(T+S)^* = T^* + S^*$

(2) $(T^*)^* = T$

$$\mathcal{H}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{H}_2$$

$$\mathcal{H}_2 \xrightarrow{T^*} \mathcal{H}_1$$

$$\mathcal{H}_1 \xrightarrow{(T^*)^*} \mathcal{H}_2$$

$$\langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, (T^*) y\rangle$$

δηλ. αν γράψω:

$S = T^*$ έχω $\langle S^* x, y\rangle \overset{\text{ορ}}{=} \langle x, Sy\rangle$

$$\begin{aligned} &\parallel \\ &\langle x, T^* y\rangle \\ &\parallel \text{ ορ} \qquad \forall x \in H_1 \\ &\langle Tx, y\rangle \qquad \forall y \in H_2 \end{aligned}$$

άρα $S^* = T$

δηλ.

$$(T^*)^* = T$$

(3) $\|T^*\| = \|T\|$ (το έχουμε δει)

Όταν $H_1 = H_2 = H$

τότε $T^* \in B(H)$

δηλαδή έχω $B(H) \longrightarrow B(H)$

$T \longrightarrow T^*$

(4) $(TS)^* = S^* T^*$ διότι:

$\langle (TS)^* x, y\rangle = \langle x, TSy\rangle = \langle x, T(Sy)\rangle$

$\forall x, \forall y \quad = \langle (T^* x), Sy\rangle = \langle S^*(T^* x), y\rangle$

$\Downarrow \quad (TS)^* = S^* T^*$

(5) + φαρμακερή:

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \quad (C^*\text{-ιδιότητα})$$

Απόδ.:

Πρώτα νδο: $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$

Πράγματι, $\forall x$, $\|STx\| = \|S(Tx)\| \le \|S\|\,\|Tx\|$

$$\le (\|S\|\cdot\|T\|)\|x\|$$

άρα $\|ST\| = \inf\{k>0 : \|STx\| \le k\|x\| \ \forall x\}$

$$\le \|S\|\,\|T\|$$

ισότητα όχι πάντα π.χ. $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\|T\| = 1$

αλλά $T^2 = 0$ άρα $\|T^2\| = 0$

όμως: $T^*T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\|T^*T\| = 1 = \|T\|^2$$

Απόδ της (5):

$$\|T^*T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|\,\|T\| \quad (\alpha)$$

και: $\forall x$: $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$

$$\le \|T^*Tx\|\,\|x\| \le \|T^*T\|\,\|x\|\,\|x\|$$

όταν $\|x\| \le 1$: $\|Tx\|^2 \le \|T^*T\|$

οπότε, $\sup\{\|Tx\|^2 : \|x\| \le 1\} \le \|T^*T\|$

δηλ. $\|T\|^2 \le \|T^*T\| \quad (\beta)$

Από (α) και (β), έχω $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ ∎

$(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\ \|)$: χώρος Banach

άλγεβρα: με $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$

$*$-άλγεβρα: $* : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$

ενέλιξη αντιγραμμική ενελικτική συνεχής(?) ...

με $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Άλλο παρ.:

$(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$ "

άλγεβρα: $(ab)(n) = a(n)b(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\|ab\|_\infty \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty$

$* : \quad a^*(n) = \overline{a(n)} \quad \forall n$

$(\bar{z} z = |z|^2)$

$\|a^*a\|_\infty = \sup\{ |\overline{a(n)} a(n)| : n \in \mathbb{N}\}$

$= \sup\{ |a(n)|^2 : n \in \mathbb{N}\}$

$= \|a\|_\infty^2$

Άλλο παρ. $(C([a,b]), \|\ \|_\infty)$

$f^*(t) = \overline{f(t)}$

Όλα αυτά είναι C^*-άλγεβρες.

$$\mathcal{H} = L^2([a,b])$$

$\forall f \in C([a,b])$ έχουμε $M_f : L^2 \to L^2$
$g \mapsto fg$

$$M_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Θεωρώ την:

$$M : C([a,b]) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
$$f \longmapsto M_f$$

ιδιότητες: $M_{(f+\lambda g)} = M_f + \lambda M_g$ γραμμική

$M_{fg} = M_f M_g$ ομομορφισμός

$M_f^* = M_{\bar{f}}$ διατηρεί $*$

$\|M_f\| = \|f\|_\infty$ διατηρεί $\| \ \|$

μορφισμός $*$-αλγεβρών + ισομετρία

"αναπαράσταση" της C^*-άλγεβρας
$C([a,b])$ ως άλγεβρας τελεστών.
(συναρτήσεις) $\longrightarrow$ (τελεστές)

Ορισμός $T\in B(H)$ φυσιολογικός (normal) όταν

$$T^*T = TT^*$$

Πχ $T = M_f$, $f\in C[a,b]$

Δεν είναι όλοι! Πχ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = T$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = T^*$$

$$T^*T = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$TT^* = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & *\\ * & *\end{bmatrix} \neq T^*T$$

Άλλο παρ.: shift $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$$e_n \longrightarrow e_{n+1}$$

$$S \sim \begin{bmatrix}0 & 0 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \ddots \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \qquad S^* = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

$S^*S = I$ διότι $S^*Se_n = e_n \ \forall n$

$$SS^*e_n = \begin{cases} e_n, & n\geq 1\\ 0, & n=0\end{cases} \qquad SS^*\neq I$$

ο bilateral shift
(αμφίπλευρης μετατόπισης)

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$e_n \to e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$U^* : e_n \to e_{n-1} \quad ,,$$

άρα $U^* = U^{-1}$ οπότε $U^*U = I$
και $UU^* = I$

<u>Ορισμός</u> $V : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ λέγεται unitary (ορθομοναδιαίος)
όταν
$$V^*V = I_{\mathcal{H}_1} \ \underline{\text{και}} \ VV^* = I_{\mathcal{H}_2}$$

<u>πχ</u> το bilateral shift

<u>Παρ</u> ένας unitary $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι γνωστικός

<u>Ορισμός</u> $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ αυτοσυζυγής (selfadjoint) : $T = T^*$

<u>δηλ</u> $\forall x, y$: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

μερικοί λένε: Ερμιτιανός (Hermitian)

[Παρ
Όταν μιλάμε για <u>μη φραγμένους</u> τελεστές:

συνήθως ορίζονται σ' έναν πυκνό (γνήσιο) γραμμ υπόχωρο : $T : D(T) \to \mathcal{H}_1$
όπου $D(T) \subseteq \mathcal{H}_2$ πυκνός γραμμ. υπόχωρος
Τότε, ερμιτιανός λέγεται όταν ισχύει
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in D(T)$$

Γενικά, ο T^* ορίζεται στο σύνολο των $y \in \mathcal{H}_2$ με την ιδιότητα, η απεικόνιση $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ να είναι συνεχής στο $D(T)$. Για <u>αυτά</u> τα y ορίζουμε $T^*y \in \mathcal{H}_1$ από τη σχέση $\langle T^*y, x\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y, Tx\rangle_{\mathcal{H}_2}$ $\forall x \in D(T)$.

Ο T λέγεται αυτοσυζυγής όταν ($\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$) και $D(T^*) = D(T)$ και $T^*y = Ty$ $\forall y \in D(T)$. (Αυτοσυζυγής $\Rightarrow$ Ερμιτιανός αλλά όχι αντίστροφα).
]

Χαρακτηρισμοί από τη δράση των τελεστών:

ΦΥΣ: $T^*T = TT^*$

Πρότ T ΦΥΣ $\Longleftrightarrow \forall x, \ \|Tx\| = \|T^*x\|$

Απόδ ($\Rightarrow$)

$\forall x \qquad \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle$

$$= \langle T^*Tx, x\rangle \overset{\text{ΦΥΣ}}{=} \langle TT^*x, x\rangle$$

$$= \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$$

($\Leftarrow$) Αν $\|Tx\| = \|T^*x\| \ \forall x$,

τότε $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle \ \forall x$

$\Downarrow$ (polarisation)

$\langle T^*Tx, y\rangle = \langle (TT^*)x, y\rangle \ \forall x, y$

$\Downarrow$

$T^*T = TT^*$. $\blacksquare$