Τα αναπάντητα ερωτήματα:

(α) Γιατί υπάρχουμε;

(β) Είναι αλήθεια ότι η

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : (H \times H) \longrightarrow \mathbb{K}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής (ως προς κάποια μετρ. γινόμενο;)

(γ) Είναι αλήθεια ότι $\varphi(E) = H_1$ δηλ. ότι η πλήρωση ενός $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ είναι ισομ. ισομ. με το σύνολο των αντιγραμμ. + φραγμ. απεικ. $f : E \to \mathbb{K}$

(δ) Έστω $(C[a,b], \| \ \|_2)$

είναι αλήθεια ότι $\forall t_0 \in [a,b]$

η $f \longmapsto f(t_0)$

είναι γραμμ. και συνεχής;

Έστω $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ και $\{e_n\}$ ο.κ. βάση του $\mathcal{H}$

$$a_{ij} = \langle Ae_j , e_i \rangle$$

$$a \in \ell^\infty , \quad D_a : \ell^2 \to \ell^2$$

$$D_a \sim \begin{bmatrix} a(1) & & 0 \\ & a(2) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$D_a^* \sim \begin{bmatrix} \overline{a(1)} & & 0 \\ & \overline{a(2)} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Δηλ: $\forall x$

$x = (x(n)) \in \ell^2$

$$(D_a x)(n) = a(n) x(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$f\in C([0,1])$: $M_f^0 : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$

$$g \longmapsto fg$$

όπου $(fg)(t)=f(t)g(t)$

προφ. $\|M_f^0(g)\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2 \quad \forall g\in C([0,1])$

η M_f^0 επεκτείνεται στην πλήρωση

$$M_f : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$$

με $\|M_f\|\le\|f\|_\infty$

(άσκ: $\|M_f\|=\|f\|_\infty$)

(ε) αναλ. φραγ.

να βρω τον M_f^*:

$\langle M_f^* g, h\rangle \overset{op}{=} \langle g, M_f h\rangle \quad \forall g,h\in L^2([0,1])$

άρα και $\forall g,h\in C([0,1])$

$$\|$$

$$\langle g, fh\rangle = \int g\overline{(fh)}$$

$$= \int g\bar f\bar h = \int \bar f g \bar h$$

$$= \langle (\bar f g), h\rangle$$

$$= \langle M_{\bar f}(g), h\rangle \quad \forall h\in C([0,1])$$

$$\Downarrow$$

$\langle M_f^* g,h\rangle = \langle M_{\bar f}(g),h\rangle \quad \forall h\in L^2([0,1])$

$$\Downarrow$$

$M_f^* g = M_{\bar f}\, g \quad \forall g\in C([0,1])$

οπότε οι φραγμ. τελεστές M_f^*, $M_{\bar f}$ συμφωνούν στον υπόχωρο $C([0,1])$ που είναι πυκνός στον L^2 άρα είναι ίσοι

(Γενική ιδέα: Αν έχω T, S φραγμένους τελεστές με
$$\langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle \quad \forall x, y$$ σ' έναν πυκνό υπόχωρο

τότε $T = S$)

Πρτρ: Αν
$\varphi : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ sesqui

φραγμ. σ' όλο το $H_1 \times H_2$
τότε είναι $= 0$

διότι αν $\exists (x,y) : \varphi(x,y) = \lambda \neq 0$

$$\{\varphi(nx, y) : n \in \mathbb{N}\} = \{n\varphi(x,y) : n \in \mathbb{N}\}$$
$$= \{n\lambda : n \in \mathbb{N}\}$$
όχι φραγμ.

οπότε, όταν λέμε ότι μια sesqui φ είναι φραγμένη, εννοούμε (εξ ορισμού) ότι
$$\sup\{|\varphi(x,y)| : x \in H_1, y \in H_2 \text{ και } \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} < +\infty .$$

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Τότε:

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| (\|x\| \|y\|)$$

παίρε sup ως προς $\|x\| \leq 1$ και $\|y\| \leq 1$

$\leq \|T\|$. Αντίστροφα:

Έστω $\varphi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ sesqui+φραγ.

να βρώ $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ τ.ω

$$\varphi(x, y) = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \ \forall y \in \mathcal{H}_2$$

Έστω $x \in \mathcal{H}_1$. Να ορίσω $Tx \in \mathcal{H}_2$

κοιτάω την: $\mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f_x : y \longmapsto \overline{\varphi(x, y)}$$: γραμμική

Επιπλέον: και;

$$|f_x(y)| = |\varphi(x, y)| \leq (\|\varphi\| \|x\|) \|y\|$$

άρα $\|f_x\| \leq \|\varphi\| \|x\|$

Λόγω πληρότητας του $\mathcal{H}_2$, από Riesz

$$\exists\, z_x \in \mathcal{H}_2 : f_x(y) = \langle y, z_x\rangle \ \forall y \in \mathcal{H}_2$$

$$\overline{\varphi(x, y)} = \langle y, z_x\rangle$$

$\Downarrow$

$$\varphi(x, y) = \langle z_x, y\rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}_2$$

$\forall x \in H_1$ βρήκα μοναδικό $z_x \in H_2$ ώστε

$$\varphi(x,y) = \langle z_x, y\rangle \quad \forall y \in H_2$$

Άρα έχω ορίσει μια απεικόνιση:

$$H_1 \longrightarrow H_2$$
$$x \longmapsto z_x$$ που ικανοποιεί

εύκολο:

Είναι γραμμική, οπότε την ονομάζω T

οπότε

$$\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$$

$$\Downarrow$$

$$\|T\| \leq \|\varphi\|$$

διότι $\langle Tx, Tx\rangle = \varphi(x, Tx) \leq \|\varphi\|\,\|x\|\,\|Tx\|$

όταν $Tx \neq 0$: $\|Tx\| \leq \|\varphi\|\|x\| \quad \forall x$

και ισχύει προφανώς και όταν $Tx = 0$

άρα $\|T\| \leq \|\varphi\|$.

Γενικά, αν $H_1 = H_2 = H$

$$\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| , \|x\| = 1 = \|y\| \}$$

$$\geq \sup\{ |\langle Tx, x\rangle| , \|x\| = 1 \}$$

?

σε ~~πραγμ.~~ χώρους, δεν ισχύει "="

πχ: $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_2)$ T: στροφή κατά $\pi/2$

ισομετρία, άρα $\|T\| = 1$

όμως $\langle Tx, x\rangle = 0$

Γενικότερα, έστω $\varphi : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ μια sesqui

Θεωρώ:

$$\varphi(x+y, x+y)$$
$$- \varphi(x-y, x-y)$$
$$+ i\varphi(x+iy, x+iy)$$
$$- i\varphi(x-iy, x-iy)$$
$$\overline{\qquad 4\varphi(x,y) \qquad}$$

αν δείξω $\hat{\varphi}(x) := \varphi(x,x)$

έχω

$$4\varphi(x,y) = \hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y) + i\hat{\varphi}(x+iy) - i\hat{\varphi}(x-iy)$$

(polarisation)

πχ

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

ισχύει, εφόσον η $\|\ \|$ προέρχεται από $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (sesqui) και άρα ικανοποιεί τον κανόνα του $\#$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(πρβλ: $\displaystyle \varphi(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n \varphi(x+i^n y, x+i^n y)$.)

Έχω λοιπόν

$$\Rightarrow |\varphi(x,y)| \leq \frac{1}{4}\Big(|\hat{\varphi}(x+y)| + |\hat{\varphi}(x-y)| + |\hat{\varphi}(x+iy)| + |\hat{\varphi}(x-iy)| \Big)$$

$$\leq \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\|\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right)$$

(κανόνας $\#$)

$$\leq \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\|\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\|\left(4\|x\|^2 + 4\|y\|^2\right)$$

αν $\|x\|, \|y\| \leq 1$

$$|\varphi(x,y)| \leq \|\hat{\varphi}\|\, 2$$

όπου $\|\hat{\varphi}\| := \sup\{ |\varphi(x,x)| : \|x\| \leq 1\}$

Συμπέρασμα:

$$\|\hat{\varphi}\| \leq \|\varphi\| \leq 2\|\hat{\varphi}\|$$

Άρα

$$\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : \|x\|\leq 1\} \leq \sup\{|\langle Tx,y\rangle| : \|x\|,\|y\|\leq 1\}$$
$$= \|T\|$$

$$\leq 2\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : \|x\|\leq 1\}$$

Συνεπώς:

- T φραγμ. $\Longleftrightarrow$ $\sup\{|\langle Tx,x\rangle| , \|x\|\leq 1\} < +\infty$
- $T=0 \Longleftrightarrow \langle Tx,x\rangle = 0 \quad \forall x$

$S=T \Longleftrightarrow \langle Sx,x\rangle = \langle Tx,x\rangle \quad \forall x$

(σε μιγαδικούς χώρους)

Παραδείγματα: T, T^*:

- σε χώρο πεπ. διάστασης: $T \sim [a_{ij}]$
$$\Downarrow$$
$$T^* \sim [\bar{a}_{ji}]$$

- το ίδιο στον ℓ^2, ως προς τη συνηθ. ορθ. βάση

$\forall\ T: \ell^2 \to \ell^2$ μπορώ:

$$a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$$

προκύπτει: $[a_{ij}]$: "$\infty \times \infty$" πίνακας, δηλ. μια απεικόνιση $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C} : (i,j) \to a_{ij}$.

Το σύνολο

$$M_\infty(\mathbb{C}) = \{ a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C} \}$$

είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο)

και η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\ell^2) &\longrightarrow M_\infty(\mathbb{C}) \\ T &\longmapsto [\langle Te_j, e_i\rangle] = [a_{ij}] \end{aligned}$$

είναι γραμμική.

Επίσης: $|\langle Te_j, e_i\rangle| \le \|T\| \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$

άρα $[a_{ij}] \in \ell^\infty(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

Αντίστροφα; Είναι αλήθεια ότι κάθε $[a_{ij}] \in \ell^\infty(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ αντιστοιχεί σε φραγμένο τελεστή;

<u>όχι</u> <u>πχ</u> αν $a_{ij} = 1\ \forall (i,j)$ τότε $\nexists\ T: \ell^2 \to \ell^2$ με $\langle Te_j, e_i\rangle = 1\ \forall (i,j)$, γιατί θα έπρεπε

$$Te_1 = (1,1,1,1,\cdots) \notin \ell^2$$

Τι περιορισμούς πρέπει να βάλω στον πίνακα;
Πρέπει κάθε στήλη του να είναι ℓ^2.
(δηλ. τετραγωνικά αθροίσιμη).

Αρκεί;

Όταν $A \in B(\ell^1)$ έχει $A \sim [a_{ij}]$

τότε $A^* \sim [\overline{a_{ji}}]$

διότι $\langle A^* e_j, e_i \rangle = \overline{a_{ji}}$

πράγματι,

$$\langle A^* e_j, e_i \rangle = \langle e_j, A e_i \rangle = \overline{\langle A e_i, e_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

<u>Άλλο παράδ.</u>

$S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$e_n \longrightarrow e_{n+1}$

$$S \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Είναι 1-1, μάλιστα ισομετρία

$$S^* \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \ddots & & & \end{bmatrix}$$

δεν είναι 1-1, αφού $\ker S^* \supseteq \{e_1\}$

$S^* : e_1 \longrightarrow 0$

$e_{n+1} \longrightarrow e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$S^*(x(1), x(2), x(3), \dots) = (x(2), x(3), \dots)$$

$$S^*(\qquad) = 0$$

$$\iff x(2) = x(3) = \dots$$

$$\iff x \in [e_1] \quad : \quad \ker S^* = [e_1]$$

Άλλο παράδειγμα: αμφίπλευρο shift U

στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x=(x(n)) : x(n)\in\mathbb{C},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2<+\infty\}$.

$$Ue_n = e_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$U(\dots\dots, x(-1), \boxed{x(0)}, x(1), \dots\dots)$$

$$= (\dots\dots, x(-2), \boxed{x(-1)}, x(0), x(1), \dots)$$

Εδώ, ο U^* είναι ο U^{-1} οπότε ο U και ο U^* είναι ισομετρία και επί

ενώ ο S ισομετρία, όχι επί

S^* συστολή, επί, όχι 1-1

$$\|S^*\| = \|S\| = 1$$

Πρότ. $\int$ και τελεστές στον $L^2([0,1])$

Έστω $k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής

$\forall f \in C([0,1])$ ορίζω

$$(A_k f)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s) ds$$

(γενικεύει το

$$\sum_j k_{ij} f_j \;)$$

το $\int$ μα υπάρχει διότι $\forall t$, η απεικ.

$$s \longmapsto k(t,s) f(s)$$

είναι $\int$σιμη

$$A_k : C([0,1]) \xrightarrow{?} C([0,1])$$

Άσκ. η $t \longmapsto (A_k f)(t)$ είναι συνεχής

άρα $A_k f \in L^2([0,1])$

A_k είναι γραμμικός
λόγω γραμμικότητας του $\int$ τος.

Είναι φραγμ ?? ως προς $\| \|_2$

$$\|A_k f\|_2^2 = \int |A_k f(t)|^2 \, dt$$

$$= \int \Big| \underbrace{\int k(t,s) f(s) \, ds}_{CS} \Big|^2 dt$$

$$\leq \int \left(\int |k(t,s)|^2 ds \right) \underbrace{\left(\int |f(s)|^2 ds \right)}_{\|f\|_2^2} dt$$

$$= \left(\int \int |k(t,s)|^2 ds \, dt \right) \|f\|_2^2$$

άρα $\|A_k f\|_2 \leq \|k\|_{22} \|f\|_2$

άρα A_k είναι $\|\ \|_2$-φραγμ. και συνεπώς

επεκτείνεται σε $A_k : L^2 \to L^2$

με $\|A_k\| \leq \|k\|_{22}$ (όχι ισότητα εν γένει)

Να βρω το A_k^*

$$\langle A_k^* f, g\rangle \overset{op}{=} \langle f, A_k g\rangle \quad \text{πάρε } f,g \in C([0,1])$$

$$= \int f(t)\,\overline{(A_k g)}(t)\,dt$$

$$= \int f(t) \left(\int k(t,s)\, g(s)\, ds\right)^* dt$$

$$= \int f(t)\left(\int \overline{k(t,s)}\;\overline{g(s)}\,ds\right)dt$$

$$= \iint f(t)\,\overline{k(t,s)}\;\overline{g(s)}\,ds\,dt$$

$$= \int\left(\int \overline{k(t,s)}\, f(t)\,dt\right)\overline{g(s)}\,ds$$

$$= \int (A_h f)(s)\,\overline{g(s)}\,ds$$

όπου $h(s,t) = \overline{k(t,s)}$: συνεχής

$$= \langle A_h f, g\rangle$$

επειδή A_k^* και A_h είναι φραγμ. τελεστές

έπεται ότι $A_k^* = A_h$

Θεωρώ τον $H^2 = \{ f \in L^2([0,1]) : \hat{f}(k) = 0 \ \forall k < 0 \}$

όπου $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt$, $k \in \mathbb{Z}$

Είναι κλειστός υπόχωρος.

$T : H^2 \to H^2$ $\quad (Tf)(t) = e^{2\pi i t} f(t)$

Βρείτε τον T^*.