19 Μαρτίου.

2 Ερωτήματα:

1) Ποιος είναι ο "μεγαλύτερος" γραμμ. υπόχωρος $E \subseteq \ell^2$

τ.ω. $\forall a = (a(n))$ να ισχύει

$$x \in E \Rightarrow D_a(x) \in E$$

δηλ. $D_a(E) \subseteq E$

2) ποιές $a = (a(n))$ έχουν την ιδιότητα $D_a(\ell^2) \subseteq \ell^2$

Απαντ: 1) $E = c_{00}$ ~~διότι~~ (i) $\forall x = (x(n)) \in c_{00}$

και $\forall a = (a(n))$

$\exists n_x : \forall n > n_x : x(n) = 0$

$$\Longrightarrow \quad D_a(x) = (a(n)x(n))$$

μηδενίζεται $\forall n > n_x$

άρα

$D_a(x) \in c_{00}$

(ii) Είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος υπόχωρος διότι;

Έστω $x \notin c_{00} \Rightarrow$ άπειρα $x(n) \neq 0$

τότε ορίζω $a(n) = \begin{cases} \frac{1}{x(n)} & : x(n) \neq 0 \\ \text{ό,τι να 'ναι} & x(n) = 0 \end{cases}$

πχ. $= 0$

τότε $D_a(x)(n) = 1$ όταν $x(n) \neq 0$

οπότε $D_a(x) \notin \ell^2$

2) Για ποια $a=(a(n))$ ισχύει ότι

$$D_a(\ell^2) \subseteq \ell^2$$

δηλ. $\forall x=(x(n))$ με $\underline{\sum |x(n)|^2 < +\infty}$

να ισχύει ότι $D_a(x)$ ικανοποιεί

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)x(n)|^2 < +\infty \quad ;$$

Ας υποθέσω ότι $\exists M : |a(n)| \le M \quad \forall n$

τότε $$|a(n)x(n)| \le M|x(n)| \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)x(n)|^2 \le M^2 \|x\|_2^2$$

<u>δηλ.</u> αν $a \in \ell^\infty$ (δηλ. φρ.) τότε

$\forall x \in \ell^2$ ισχύει $D_a(x) \in \ell^2$

και μάλιστα $\|D_a(x)\|_2 \le M \|x\|_2$

$\forall$ άνω φρ M της $(|a(n)|)$

οπότε $$\|D_a(x)\|_2 \le \|a\|_\infty \|x\|_2$$

όπου $\|a\|_\infty = \sup\{|a(n)| : n \in \mathbb{N}\}$.

1 Συμπέρασμα 2 τρόποι ;

(α) $D_a(\ell^2) \subseteq \ell^2$

πρέπει: D_a γρ. ⊗

(β) D_a φραγμ.! (από $\|a\|_\infty$)

⊗ διότι $D_a(x+\lambda y) = \big(a(n)(x(n)+\lambda y(n))\big)$

$= (a(n)x(n)) + \lambda (a(n)y(n))$

$= D_a(x) + \lambda D_a(y)$

οπότε $D_a : \ell^2 \to \ell^2$ συνεχής

Ερώτηση:

Αν $a=(a(n))$ είναι τ.ω $D_a(\ell^2)\subseteq \ell^2$

είναι τότε η $(a(n))$ φρ;

Υποθέτω ότι $(a(n))$ όχι φραγμ.

$\exists$ υπακ. $(a(k_n))$ της $(a(n))$

με $|a(k_n)|>n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Τώρα, ορίζω $x=(x(n))$ ως εξής:

$$\begin{cases} x(k_n)=\frac{1}{n} & \forall k_n \\ x(m)=0 & \text{όταν } m\notin\{k_n\} \end{cases}$$

οπότε: $(D_a(x))(k_n)=1$ $\forall n$.

άρα $D_a(x)\notin\ell^2$ επειδή τα $\{k_n\}$ είναι άπειρα.

όμως, $\sum_{m=1}^{\infty}|x(m)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x(k_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$

άρα $x\in\ell^2$

Συμπέρασμα ΤΕΕΙ (i) $D_a(\ell^2)\subseteq\ell^2$

(ii) a φραγμ. ακολουθία

(iii) D_a φραγμ. τελεστής

Γνωρίζω ότι $(c_{00}, \| \ \|_2)$

Ξέρω ότι $\forall a = (a(n))$, ο D_a ορίζεται

$$D_a : c_{00} \to c_{00} \text{ γραμμικός}$$

όταν $a \in \ell^\infty$ τότε βεβαίως D_a φραγμ.

όταν $a \notin \ell^\infty$ τότε D_a μη φραγμ.

$\Updownarrow$ ασυνεχής στο 0

Θ.δ.ο

$\exists (x_n)$ $x_n \in c_{00}$ τ.ω. $\|x_n\|_2 \to 0$

αλλά $\|D_a(x_n)\|_2 \not\to 0$

Πράγματι, αν $a \notin \ell^\infty$, τότε $\exists (a(k_n))$ υπακ.

$$|a(k_n)| > n \quad \forall n$$

ονομάζω $x_n = \dfrac{e_{k_n}}{n}$; $\|x_n\|_2 = \dfrac{1}{n} \to 0$

$$x_n \xrightarrow{\| \ \|_2} 0$$

$$D_a(x_n) = D_a\left(\frac{e_{k_n}}{n}\right) = \frac{a(k_n)}{n} e_{k_n}$$

$$\Rightarrow \|D_a(x_n)\|_2 = \left|\frac{a(k_n)}{n}\right| \|e_{k_n}\|_2$$

$$= \left|\frac{a(k_n)}{n}\right| > 1 \quad \forall n$$

$\blacksquare$

__Πρόβ.__ Ένας μη φραγμ. τελεστής ορισμένος σε χώρο Hilbert

$\mathcal{H} = \ell^2$ $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ο.κ. βάση

όχι αλγεβρ. βάση

π.χ. $e = \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$

αλλά $e \in [e_n : n \in \mathbb{N}]$ (γιατί;)

άρα το σύνολο:

$\mathcal{E}_0 = \{e, e_1, e_2, \dots \}$ γρ. ανεξ.

Επεκτείνω το $\mathcal{E}_0$ σε αλγ. βάση $\mathcal{E}$ του ℓ^2

(αυτό γίνεται: Λήμμα Zorn!)

ορίζω μια $A : \ell^2 \to \ell^2$

ως εξής: $A(e) = e$

$A(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{E} \setminus \{e\}$

και επεκτείνω γραμμικά

δηλ. $\forall y \in \ell^2$ γράφεται μοναδικά:

$$y = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in \mathcal{E}$$

θέτω $$Ay := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j A(x_j)$$

Όμως η A είναι ασυνεχής!

διότι $e = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

αν ονομάσω $f_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots\right)$

τότε $\|e - f_n\|_2 \to 0$

όμως $A(f_n) = A\left(e_1 + \frac{1}{2} e_2 + \dots + \frac{1}{n} e_n + 0\right)$

$= 0 \quad \forall n$

ενώ $A(\lim f_n) = A(e) = e \neq 0$

Παρατ.: $e \notin [e_n : n \in \mathbb{N}]$ αλλά $e \in \overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]}$

$A : (E, \langle \cdot,\cdot \rangle) \longrightarrow (F, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ γραμμ.

υποθέτω $\dim E < \infty$ (το F δεν χρειάζεται)

$A(E)$ είναι γραμμ. υποχ. του F
και $\dim A(E) \le \dim E < \infty$

Διαλέγω μια ορθοκ. βάση $\{e_1 \dots e_n\}$ του E
(άρα και αλγεβρ. βάση)

$$\forall x \in E \ : \ x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

Θεωρώ μια ον βάση $\{f_1 \dots f_m\}$ του $A(E)$

$\forall j = 1, \dots, n$, το $Ae_j \in A(E)$ γράφεται

$$Ae_j = \sum_{k=1}^{m} \langle Ae_j, f_k \rangle f_k \qquad j = 1 \dots n$$

Έστω $a_{kj} = \langle Ae_j, f_k \rangle$.

$A \longrightarrow [a_{kj}] \in M_{mn}$ = πίνακες με m γραμμές
και n-στήλες
μιγαδ. αριθμών

Αντίστροφα, αν μου δώσουν: πίνακα
$[b_{kj}] \in M_{mn}$

μπορώ να ορίσω $B : E \longrightarrow F$ ως εξής:

Θέτω $Be_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k$, $j = 1 \dots n$

και επεκτείνω γραμμικά στο E

δηλ. $\forall x \in E \quad x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$

$$Bx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k$$

$$Bx = \sum_{j,k} \langle x, e_j \rangle b_{kj} f_k$$

Προτ. $\forall$ γραμμική απεικ. $A: E \to F$ όταν $\dim E < \infty$ είναι συνεχής:
$$\dim E = n$$

απόδ. $\forall x \in E$: $\quad x = \sum \langle x, e_j \rangle e_j$

$$\|Ax\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle A e_j \right\|^2$$

$$\overset{\Delta\text{κη}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle| \, \|A e_j\| \right)^2$$

$$\overset{C-S}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \|A e_j\|^2 \right)$$

δηλ.
$$\|Ax\| \leq M \|x\|, \quad M = \left(\sum_{j=1}^{n} \|A e_j\|^2 \right)^{1/2}$$

Παρατ. Το φράγμα αυτό δεν είναι βέλτιστο:

Παράδ.: $A(e_j) = a(j) e_j$ (δηλ. "είναι" ο D_a)

πριν δείξαμε $\|Ax\| \leq \|a\|_\infty \|x\|$

τώρα $\quad \|Ax\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a(j)|^2 \right)^{1/2}$

Συμπέρασμα: Όταν ο Π.Ο. έχει πεπ. διάσταση, κάθε γραμμ. απεικόνιση είναι συνεχής.

Όταν το σύνολο τιμών έχει πεπερ. διάσταση, τότε όχι εν γένει.

$a \in \ell^\infty$

$D_a : \ell^2 \to \ell^2 \quad D(e_n) = a(n) e_n \ \forall n$

$S : \ell^2 \to \ell^2$ shift $S(e_n) = e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

δηλαδή, $\forall\, x = (x(n)) \in \ell^2$ δέχω

$$S(x(1), x(2), x(3), \dots) = (0, x(1), x(2), x(3), \dots)$$

καλά ορισμένη: αν $\|x\|_2 < +\infty$

τότε $\|S(x)\|_2 < +\infty$. Πράγματι:

$$\|S(x)\|_2^2 = 0^2 + |x(1)|^2 + |x(2)|^2 + |x(3)|^2 + \dots$$

$= \|x\|_2^2$ μάλιστα και ισομετρία

προφανώς γραμμική

ισομετρία $\Rightarrow$ 1-1

διότι αν $\|Sx\| = 0$ τότε $\|x\| = 0$

Επί; ΑΜΦΕ!

πχ $e_1 \notin S(\ell^2)$

μάλιστα $e_1 \perp S(\ell^2)$

$$S \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \ddots \end{bmatrix}$$

$\infty \times \infty$ πίνακας

Το «ανάποδο» $T : \ell^2 \to \ell^2$

$$T(e_n) = \begin{cases} e_{n-1} & n \geq 2 \\ 0 & , n = 1 \end{cases}$$

$$T \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$T(x(1), x(2), x(3), \dots) = (x(2), x(3), x(4), \dots)$$

και άρα $\|T(x)\|_2^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 = \|x\|_2^2$

και μάλιστα $\|Tx\| \leq \|x\|$

Γενικά

$\|T\| = \inf\{k > 0 : \forall x \ \|Tx\| \leq k\|x\|\} \leq 1$

αλλά $\|T(e_3)\| = \|e_2\| = 1$

άρα $\|T\| \geq 1$

$\Rightarrow \|T\| = 1$

ο T δεν είναι 1-1, διότι $T(e_1) = 0$

Είναι όμως επί διότι: $\forall e_n \in T(\ell^2)$ (δεν αρκεί)

Ξανά:

$\forall y = (y(1), y(2), \dots) \in \ell^2$

ορίζω $x = (0, y(1), y(2) \dots) \in \ell^2$

$Tx = (y(1), y(2), \dots) = y$ ∴ είναι επί

$$y \xrightarrow{S} Sy \xrightarrow{T} TSy \quad ; \quad TS = I$$

$$x \longrightarrow Tx \longrightarrow STx \overset{?}{=} x$$ αποκλείεται να ισχύει $\forall x$

πράγματι, αν $x = e_1$, $T(e_1) = 0$, άρα

$$ST(e_1) = 0$$

Όμως, πάρε $x = (0, x(1), x(2) \dots)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_{n+1} = \lim_N \sum_{n=1}^{N} x(n) e_{n+1}$$

Τότε

συνέχεια του ST

$$ST(x) = \lim_N ST\left(\sum^{N} x(n) e_{n+1}\right)$$

γραμμικότητα

$$= \lim_N \sum_{n=1}^{N} x(n) \underbrace{ST(e_{n+1})}_{= e_{n+1} \ \forall n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_{n+1} = x$$

(γίνεται και απευθείας!)

Θέτω: $E = \{(0, x(2), x(3), \dots) : \sum |x(n)|^2 < +\infty\}$

$$= [e_1]^{\perp}$$

Τότε:

$$ST\Big|_{[e_1]^{\perp}} = I\Big|_{[e_1]^{\perp}} \qquad TS = I_{\ell^2}$$

Επέκταση/ γραμμ. φρ. απεικ. από πυκνούς υπόχ!

Έστω $(E, \| \|)$ χώρος με νόρμα, $(F, \| \|)$ Banach.

Έστω $D \subseteq E$ πυκνός γραμμ. υπόχ.

Αν $A : D \longrightarrow F$ γραμμική

τότε $\exists\, \tilde{A} : E \longrightarrow F$ γραμμ. φραγμ.

$\Longleftrightarrow A$ φραγμ.

τότε $\tilde{A}$ είναι μοναδική και

$\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

<u>Απόδ</u> Έστω $x \in E$. Να ορίσω $\tilde{A}x$:

Ξέρω $\exists (x_n)$ με $x_n \in D$, $\|x_n - x\| \to 0$

φυσιολογικό είναι να ορίσω

$$\boxed{\tilde{A}x = \lim Ax_n}$$

(i) $\exists$?

(ii) καλά ορισμένο?

δηλ. αν (y_n) με $y_n \in D$ και $\|y_n - x\| \to 0$

$\lim Ay_n = \lim Ax_n$;

(ii)' $\tilde{A}|_D = A$ ισχύει άραγε στη

(iii) Είναι γραμμ + φρ η $\tilde{A}$

(iv) $\|\tilde{A}\| = \|A\|$

(v) $\tilde{A}$ μοναδική.

Αποδεικνύω το (i):

(x_n) συγκλίνει $\Rightarrow$ (x_n) βασική

$\Downarrow$

(Ax_n) βασ !

διότι

$$\|Ax_n - Ax_m\| \overset{\gamma\rho}{=} \|A(x_n - x_m)\|$$

$$\overset{A\ \varphi\rho}{\leq} \|A\|\,\|x_n - x_m\|$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 : \forall n, m \geq \nu_0$ ισχύει $\|x_n - x_m\| < \dfrac{\varepsilon}{\|A\|}$

οπότε $\|Ax_n - Ax_m\| < \varepsilon$

Όμως έχω υποθέσει F πλήρης χώρος, άρα

$$\exists \lim_n Ax_n := \tilde{A}x \in F$$

Αποδ

(ii) Αν $y_n \to x$ και $\|y_n - x_n\| \to 0$

$\Downarrow$

$$\|Ax_n - Ay_n\| \leq \|A\|\,\|x_n - y_n\| \to 0$$

οπότε $Ay_n \longrightarrow \tilde{A}x$

(iii) Αν $x \in D$ θεωρώ (x_n) με $x_n = x\ \forall n$

οπότε $\tilde{A}x = \lim Ax_n = Ax$