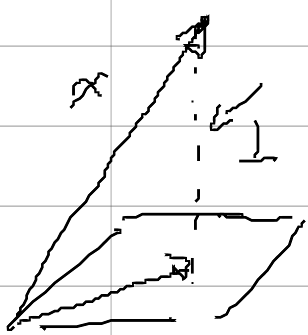
5 Μαρτίου 2015
(712)

E : χώρος μ' εσωτ. γινόμ.

Δείξαμε: αν $F \subseteq E$ υπόχωρος, $\dim F = n < +\infty$

$$\forall x \in E \ \exists!\, y_x \in F : \ \|x - y_x\| = dist(x, F)$$



$$dist(x, F) = \inf\{\|x-y\| : y \in F\}$$

$$y_x = P_F(x)$$

μάλιστα $x - P_F(x) \perp F$

Απόδ $\exists \{e_1 \ldots e_n\}$ ορθοκανονική βάση του F κ.λπ.

Τι μπορώ να κάνω όταν $\dim F = +\infty$;;

E χώρος μ' εσωτ. γινομ.

F γνήσιος κλειστός υπόχωρος

2 προβλ.!

Βρες $x \in E$, $x \neq 0$

$x \perp F$

$\Downarrow$

Βρες

κλειστό υπόχωρο F'

ώστε $F \cap F' = \{0\}$

και $F + F' = E$

Επιπλέον $F \perp F'$ $\longrightarrow$ βέλτιστη προσέγγιση

Δοθέντος $z \in E$

βρες (αν $\exists$) $y_z \in F$

με $\|z - y_z\| =$ ελάχιστο

Παράδ. $E = c_{00} = \{x = (x(n)) : \operatorname{supp} x \text{ πεπερ.}\}$

$$\langle x, y\rangle = \sum x(n)\overline{y(n)}$$

$$F = \{x : \sum \tfrac{1}{n} x(n) = 0\}$$

γραμμικός υπόχ. $\neq E$

κλειστός, διότι: αν $f(x) = \sum \frac{1}{n} x(n)$

γραμμ. $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$

από C-S

$$|f(x)| \le \sqrt{\sum \tfrac{1}{n^2}}\,\sqrt{\sum |x(n)|^2} \quad \forall x$$

$$\le \pi \|x\|_2 \quad : f \text{ συνεχής}$$

Άρα ο $F = f^{-1}(\{0\})$: κλειστός

$\exists$? $y \perp F$?: $y \perp (e_1 - 2e_2) \in F$

$$(1, -2, \dots)$$

και γενικά

$\forall n \quad y \perp (e_1 - n e_n) \in F$

$$\langle y, e_1 - n e_n\rangle = 0 \quad \forall n$$

$$\langle y, e_1\rangle = n\langle y, e_n\rangle$$

$$y(n) = \tfrac{1}{n} y(1)$$

όπως, αν $y(1) \neq 0 \Rightarrow \overbrace{\forall n,\ y(n) \neq 0}^{\notin E}$

αν $y(1) = 0 \Rightarrow y = 0$

αναγκαστικά, $y = 0$

Αν: $y(1) = w \neq 0$

$$y = w(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots) \in \ell^2$$

ℓ^2 πλήρης ως προς $\|\ \|_2$ και $\overline{c_{00}}^{\|\ \|_2} = \ell^2$

Εικασία: Το πρόβλημα λύνεται αν έχω πληρότητα.

Θεωρ. Αν H : χώρος Hilbert,
F : (γνήσιος) κλειστός υπόχωρος

$$\forall x \in H \ \exists!\, y_x \in F \text{ με}$$

$$\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in F\} = d$$

Αποδ. Αν $F = H$ ή αν $x \in F$: το πρόβλημα $y_x = x$.

Μπορώ $x \notin F$ οπότε $d > 0$.

Έστω $y, y' \in F$. Στα $y - x$, $y' - x$: κανόνα $/\!/$:

$$\|(y-x) + (y'-x)\|^2 + \|(y-x) - (y'-x)\|^2 =$$

$$2\|y-x\|^2 + 2\|y'-x\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|y - y'\|^2 = 2\|y-x\|^2 + 2\|y'-x\|^2 - \|y + y' - 2x\|^2$$

$$= \quad '' \quad + \quad '' \quad - 4\Big\|\underbrace{\frac{y+y'}{2}}_{\in F} - x\Big\|^2$$

Όμως $\frac{y+y'}{2} \in F$, άρα $\|\frac{y+y'}{2} - x\| \geq d$.

$$\Rightarrow \|y - y'\|^2 \leq 2\|y-x\|^2 + 2\|y'-x\|^2 - 4d^2 \qquad (1)$$

Τώρα: $d = \inf\{\|y - x\| : y \in F\}$: $\exists (y_n)$, $y_n \in F$
τ.ω. $\|y_n - x\| \to d$

$\underline{\text{Θ.δ.ο.}}$ (y_n) συγκλίνει σε κάποιο $y_x \in F$ (κλ.)
οπότε $\|y_x - x\| = d$

(1) $\Rightarrow$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\underbrace{\|y_n - x\|^2}_{\to d^2} + 2\underbrace{\|y_m - x\|^2}_{\to d^2} - 4d^2$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $n, m \geq n_0$

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 4d^2 + \varepsilon - 4d^2 = \varepsilon$$

άρα (y_n) βασ, άρα συγκλίνει (!!)

Μοναδικότητα:
αν $\exists\, y, y'$ με $\|x - y\| = d = \|x - y'\|$

$$(1) \Rightarrow \|y - y'\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = y'$$

$\underline{\text{Ορισμός}}$ $y_x = P_F(x)$: η $\underline{\text{ορθή}}$ προβολή του x
στον υποχ. F.

Θεώρημα $x - P_F(x)$ είναι $\perp F$

Απόδ. το $P_F(x)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\|x - P_F(x)\| = \text{ελάχιστο} = dist(x, F)$$

Έστω τυχόν $y \in F$. Ν.δ.ο. $(x - P_F(x)) \perp y$.

Όμως, $\underbrace{\overline{[P_F(x), y]}}_{\uparrow \text{ γραμμ. θήκη}} = \underbrace{F_0}_{\uparrow \text{ έχει πεπερ. διάσταση}} \subseteq F$

Παρατηρώ ότι $P_F(x)$ είναι το πλησιέστερο διάνυσμα του F_0 προς το x

οπότε, από το Λήμμα του Δευτέρου,

Ξέρω $(x - P_F(x)) \perp F_0$

άρα $\perp y$

Άλλη απόδειξη Θέτω $z = x - P_F(x)$

Όμως, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $(y \in F)$

$$\|z - \lambda y\| = \|x - (P_F(x) + \lambda y)\| \geq dist(x, F) = \|x - P_F(x)\| = \|z\|$$

Άρα:

$$\|z - \lambda y\|^2 - \|z\|^2 \geq 0$$

$$\| \quad - \langle \lambda y, z \rangle - \langle z, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle$$

$$= -\lambda \langle y, z \rangle - \bar{\lambda} \langle z, y \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Βάλε $\lambda = \frac{1}{n} \langle z, y \rangle$

$$= -\frac{1}{n} \langle z, y \rangle \langle y, z \rangle - \frac{1}{n} \overline{\langle z, y \rangle} \langle z, y \rangle + \frac{1}{n^2} |\langle z, y \rangle|^2 \|y\|^2$$

$$= \frac{1}{n} |\langle z, y \rangle|^2 \left(\frac{1}{n} \|y\|^2 - 2 \right) \geq 0 \quad \forall n$$

$$\Longrightarrow |\langle z, y \rangle|^2 = 0 \quad \blacksquare$$