Δευτέρα, 2 Μαρτίου 2015

$x, y \in E$, $\langle y, y\rangle = 1$

$z = x - \langle x, y\rangle y$. Έχω: $\langle z, z\rangle \geq 0$ $=0$ ανν
$= x - \lambda y$ $z = 0$ ανν
$x = \langle x, y\rangle y$

$\langle z, z\rangle = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle =$

$\langle x, x\rangle - \langle x, \lambda y\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle$

$= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle$

$= \langle x, x\rangle - \langle y, x\rangle\langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle + |\langle x, y\rangle|^2$

$= \langle x, x\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \geq 0$

άρα $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle$ όταν $\langle y, y\rangle = 1$

Γενικά $y \in E$: αν $y = 0$ οκ: $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle$ 0
αν $y \neq 0$ τότε $\langle y, y\rangle > 0$ οκ

αν ορίσω $y_1 = \dfrac{y}{\langle y, y\rangle^{1/2}} \in E$ και $\|y\| = \langle y, y\rangle^{1/2}$

τότε $\langle y_1, y_1\rangle = 1$

οπότε

$|\langle x, y_1\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle$

$\left|\left\langle x, \dfrac{y}{\|y\|}\right\rangle\right|^2 \leq \langle x, x\rangle = |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\|y\|^2$

δηλ $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ οκ

<u>Άσκ.</u> Αν $\langle \cdot , \cdot \rangle$ είναι <u>ημι</u>-εσωτ. γινόμενο

$(\delta \eta \lambda . \ \langle x, x \rangle = 0 \not\Rightarrow x = 0)$

(α) τότε η C-S ισχύει

(β) Ο $N = \{x \in E : \langle x, x \rangle = 0\} \subseteq E$
είναι γραμμ. υπόχωρος του E
οπότε αν ορίσω

$$\tilde{E} = E/N = \{\tilde{x} = x + N : x \in E\}$$

τότε το $\langle \cdot , \cdot \rangle$ του E

επάγει εσωτ. γινόμενο στον $\tilde{E}$.

<u>Εφαρμογή</u>:

$E = R$-ολοκλ. συναρτ. στο $[0,1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g}$$

Εδώ αν: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
τότε: $\bar{z} = x - iy$

$$\mathrm{Re}\, z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

και $f : [0,1] \to \mathbb{C}$
είναι R-ολοκλ. $\Leftrightarrow$

$\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ είναι R-ολοκλ.

Δ-κή $\qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\Updownarrow$$

$$\|x+y\|^2 \leq \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \leq 2\|x\|\|y\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\| \qquad \text{ok}$$

από C-S

<u>Προτ</u>

$$x_n \to x \overset{\text{ορ}}{\iff} \|x_n - x\| \to 0$$

και $y_n \to y$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\mathbb{K}}{\underset{\uparrow}{\langle x_n, y_n\rangle}} \longrightarrow \underset{\mathbb{K}}{\underset{\uparrow}{\langle x, y\rangle}}$$

<u>Αποδ</u>

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle|$$

$$\le |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle|$$

$$\overset{CS}{\le} \underbrace{\|x_n - x\|}_{0} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\text{φραγμ}} + \underbrace{\|x\|\,\|y_n - y\|}_{0 \text{ no problem}}$$

όχι

είναι η απεικόνιση $f:(x_n, y_n) \longrightarrow \langle x_n, y_n\rangle$ <u>ομοιόμορφα</u> συνεχής;

~~πορφ~~

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$+ \quad = 2\|x\|^2 \qquad + 2\|y\|^2$$

κανόνας #μου.

Όταν $\langle x,y\rangle = 0$ τότε

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$ (Πυθαγόρειο Θεωρ.)

Ορθοκανονικές οικογένειες:

πχ στον $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ τα $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ όπου

$$e_i = (0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots 0)$$

Είναι ΟΚ [είναι και βάση]

πχ στον $\ell^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \underbrace{\sum |x(n)|^2}_{\|x\|_2^2} < +\infty\}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \overline{y(n)}$$

οκ διότι από C-S, συγκλίνει / τα

$$\forall N \quad \sum_{n}^{N} |x(n) \overline{y(n)}| \underset{CS}{\leq} \sqrt{\sum^{N} |x(n)|^2 \sum^{N} |y(n)|^2}$$

$$\leq \|x\| \cdot \|y\|$$

πάλι τα $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$

είναι μια άπειρη ορθοκανονική οικογένεια.

στον $C([-\pi, \pi])$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}$

$\{\cos nt, \sin mt\}_{n, m \in \mathbb{N}}$

είναι Ο.Κ.

$e_n(t) = e^{int} = \cos nt + i \sin nt$, $n \in \mathbb{Z}$

$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ΟΚ.

Στον ℓ^2, τα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{E}$ όχι αλγ. βάση

πχ $x = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

όχι γραμμ. συνδυασμός των $\{e_n\}$.

$[\mathcal{E}]$ = γραμμ. θήκη του $\mathcal{E}$

$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \; , \lambda_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}$

$= \{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, 0, 0, \dots) \quad " \quad \}$

$= c_{00}(\mathbb{N})$

$= \{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με $\operatorname{supp} x$ πεπερ.$\}$

$\operatorname{supp} x = \{ n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0 \}$

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι αλγ. βάση του c_{00}, όχι του ℓ^2

Όμως ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ^2

πχ $x = \left(\frac{1}{m}\right)$ $\quad x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{n}, 0, 0, 0 \dots\right)$

$x - x_n = \left(0, 0, \dots 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots\right)$

$\|x - x_n\|_2^2 = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 + \dots$

όμως $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$

άρα $\|x - x_n\|_2^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Όμως $x_n = e_1 + \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{3} e_3 + \dots + \frac{1}{n} e_n \in c_{00}$

Γενικά, αν $x=(x(n))\in \ell^2$

και θέσω
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} x(k)e_k \in c_{00}$$
$$=(x(1),x(2),\dots,x(n),0,0,\dots)$$

και $\|x-x_n\|\to 0$

Επομένως
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)e_k$$

σημαίνει σύγκλιση ως προς $\|\ \|$

όπου $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ παράγει γραμμικά τον c_{00}

οπότε η κλειστή γραμμική θήκη της είναι όλος ο ℓ^2.

Συμβαίνει το ίδιο με

τα $\{e^{int} : n\in\mathbb{Z}\}$;

$\mathcal{E} =$

$[\mathcal{E}]$ = τριγωνομετρικά πολυ. $\neq C([0,2\pi])$

$$\overline{[\mathcal{E}]}^{\|\ \|_2} \overset{?}{=} C([0,2\pi])$$ YES, NO;

(εδώ $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$)

Πρότ. Αν $\{e_i\}$ είναι ορθ/κό σύνολο σ' έναν E

τότε είναι γραμμ. ανεξ.

Απόδ. Έστω $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = 0$ για κάποια $\lambda_k \in \mathbb{K}$ και κάποιο n

$$\Downarrow ?$$

$$\forall \lambda_m = 0$$

Εσωτερικό γινόμενο με ένα e_{i_m}:

$$0 = \langle \sum \lambda_k e_{i_k}, e_{i_m} \rangle = \sum \lambda_k \underbrace{\langle e_{i_k}, e_{i_m} \rangle}_{\text{όλα } = 0 \text{ εκτός αν } k = m \text{ οπότε } = 1} = \lambda_m$$

Έδειξα ότι $\forall \lambda_m = 0$

(Γενικότερα, αν $x = \sum \mu_k e_k$, τότε τα μ_k βρίσκονται εσωτερικό γινόμενο:

$$\mu_m = \langle \sum \mu_k e_k, e_m \rangle.$$

ΧΩΡΟΙ HILBERT: → χώρος μ/ εσωτ. γινομ. γραμμ.

$\mathcal{H}$ → πλήρης ως προς αυτό

(δηλ) ως προς τη μετρ.

$d(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle} = \|x-y\|$

επομένως πρέπει:

αν (x_n) ακολ. του $\mathcal{H}$ είναι βασική

(δηλ. $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0$: όταν $n,m\geq n_0$ τότε $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$)

τότε $\exists x\in\mathcal{H}$ ώστε $\|x_n-x\|\to 0$

παρ.

- Ο $\mathbb{R}^n$, ο $\mathbb{C}^n$ είναι χώροι H ως προς το συνήθ. εσωτ. γινόμενο
- Ο ℓ^2 είναι $\mathcal{H}$ (ειδικότερα είναι γραμμ. χώρος)

γραμμ. χώρος: Αν $x,y\in\ell^2$: $|x(n)+y(n)|^2\le 2|x(n)|^2+2|y(n)|^2$

αθροίζω ως προς n:

άρα $x+y\in\ell^2$

Επίσης: $\lambda x\in\ell^2$ οκ

πληρότητα: βλέπε προσφ.

- Ο c_{00} δεν είναι Hilbert (όχι πλήρης)

πχ $x_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k$

$\|x_n-x_m\|^2=\left\|\sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} e_k\right\|^2=\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^2}$

βασική, αλλά συγκλίνει έξω απ' το χώρο (δηλ) δεν συγκλίνει)

- Ο c_{00} είναι $\|\ \|_2$-πυκνός στον ℓ^2
- Ο $C=C([0,1])$ ή $C([a,b])$ δεν είναι Hilbert

$(C,\|\ \|_2)$ είναι χώρος μ/ εσωτ. γινόμενο, όχι πλήρης

$(C,\|\ \|_\infty)$ πλήρης, αλλά η $\|\ \|_\infty$ όχι από εσωτ. γινόμενο

λόγω: όχι #γραμμο