Καλώς ήρθατε στους Γραμμικούς Τελεστές!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E $\mathbb{K}$*-γραμμικός χώρος* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$)*. Ένα* **εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)** *στον* E *είναι μια απεικόνιση*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (ii) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \\ (iii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iv) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (iv)' \ \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle .$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E, δηλαδή ικανοποιεί, για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{ll} (i) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ (ii) & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\ (iii) & \|x\| = 0 \iff x = 0. \end{array}$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πόρισμα

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$$(E, \|.\|) \times (E, \|.\|) \to (\mathbb{K}, |.|) : (x, y) \to \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0,\ \text{τότε } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Καθετότητα

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y *ενός χώρου* E *με εσωτερικό γινόμενο λέγονται* **κάθετα** *(συμβολικά* $x \perp y$*) όταν* $\langle x, y \rangle = 0$.
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ *λέγεται* **ορθοκανονική** **(orthonormal)** *αν* $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ *για κάθε* $i, j \in I$.

Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο* $(E, \langle ., . \rangle)$ *με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *στον* E *ώστε, για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*, να ισχύει*[1] $[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Κάθε $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

Βέλτιστη προσέγγιση

Λήμμα

Έστω E *χώρος με εσωτερικό γινόμενο,* $x \in E$ *και* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον* E*. Η απεικόνιση*

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$*.*
Δηλαδή το διάνυσμα $y_o = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$ *είναι το πλησιέστερο στο* x *στοιχείο του υποχώρου* $F = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$*.*
Επιπλέον το $x - y_o$ *είναι κάθετο στον* F *και αντίστροφα, αν* $y \in F$ *και* $x - y \perp F$*, τότε* $y = y_o$*.*

Απόδειξη Λήμματος Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$.
Τώρα: $(x-y) \perp F \iff \langle x-y, e_k \rangle = 0 \; \forall k, \iff$
$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \; \forall k, \iff y = y_o$.
Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \ldots n$) και $y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $\|y_1 + z\|^2 = \|y_1\|^2 + \|z\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \ldots, n]$.

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πρόταση (Πλησιέστερο διάνυσμα)

Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in E$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y\| = d(x, E) \equiv \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο y του E ονομάζουμε **(ορθή) προβολή** *του x στον E, και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.*

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε το διάνυσμα $x - P_E(x)$ είναι κάθετο στον E. Αντίστροφα αν $y_0 \in E$ και $(x - y_0) \perp E$ τότε $y_0 = P_E(x)$.

Πόρισμα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H, z \neq 0$ ώστε $z \perp M$. Η απόσταση του z από τον M είναι η μεγαλύτερη δυνατή : $d(z, M) = \|z\|$.

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινομενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα

Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert *H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.*

Ορισμός (κάθετος υπόχωρος)

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο ενός χώρου H με εσωτερικό γινόμενο, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Παρατήρηση Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H : y \to P_M(y)$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \to \mathbb{K} : y \to \langle y, x \rangle.$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλ.

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε } \; y \in H.$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$. Το X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $[X]$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός

*Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική βάση** του E αν*
(i) είναι ορθοκανονική και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{[e_i : i \in I]} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση **δεν είναι συνήθως** αλγεβρική βάση.

Παρατήρηση

Έστω $\mathscr{C} = \{e_i : i \in I\}$ *ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο* **Hilbert** H. *Η* $\mathscr{C}$ *είναι βάση του* H *αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του* H *(εκτός από την* $\mathscr{C}$*), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του* H *που είναι κάθετο στην* $\mathscr{C}$ *είναι το* 0.

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος χώρος E με εσωτερικό γινόμενο περιέχει μια ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F. π.χ. $E = C([0,1])$ και $F =$ πολυώνυμα.

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$,
(ι) Η σειρά $\sum \langle x, e_n \rangle e_n$ συγκλίνει στο x (ως προς τη νόρμα του E).
(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Απόδειξη Έστω $x \in E$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Όμως πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

Ξέρουμε όμως (Πυθαγόρειο)

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

$$\text{Αν } m \geq n, \text{ έχουμε } \quad \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E για κάθε $x, y \in E$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, e_n\rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.
(Άρα, ο E έχει μια πλήρωση που είναι χώρος Hilbert.)

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος [2] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.
Ακριβέστερα, αν $\{x_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H, η απεικόνιση

$$U : H \to \ell^2 \ : \ x \to (\langle x, x_n\rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2.

[2] Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για μη διαχωρίσιμους χώρους.

Φραγμένοι τελεστές

Θεώρημα

Αν $(E, \|.\|_E)$ *και* $(F, \|.\|_F)$ *είναι χώροι με νόρμα και* $T : E \to F$ *είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η* T *είναι συνεχής.*

(β) *Η* T *είναι συνεχής στο* $0 \in E$.

(γ) *Η* T *είναι συνεχής σε* κάποιο σημείο *του* E.

(δ) *Υπάρχει* $M < \infty$ *ώστε* $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ για κάθε $x \in E$.

(ε) *Ο περιορισμός της* T *στην μοναδιαία σφαίρα του* E *είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο* $\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ *είναι φραγμένο.*

(στ) *Η* T *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Φραγμένοι τελεστές

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική απεικόνιση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία γραμμική *απεικόνιση* $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *λέγεται* **φραγμένη** *ή* **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** *αν ο περιορισμός της* T *στην μοναδιαία σφαίρα του* E *είναι φραγμένη συνάρτηση.*

Αν $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, θέτουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, +\infty].$$

Η T είναι φραγμένη αν και μόνον αν $\|T\| < +\infty$.

Φραγμένοι τελεστές

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Πρόταση

Αν $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *είναι χώροι με νόρμα και* $T : E \to F$ *φραγμένος τελεστής, τότε*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\}$$

$$= \inf\{k > 0 : \|Tx\|_F \leq k\|x\|_E \text{ για κάθε } x \in E\}.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|.\|x\|_E$$

για κάθε $x \in E$.

Φραγμένοι τελεστές

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
D *πυκνός υπόχωρος του* E *και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Η T *δέχεται συνεχή επέκταση*

$$T_1 : E \to F \quad \text{δηλ.} \;\; T_1|_D = T$$

αν και μόνον αν είναι συνεχής.

Η επέκταση T_1 *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|T_1\| = \|T\|$.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ *είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε* $\mathscr{B}(E, F)$ *το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων*

$$T : (E, \|.\|) \to (F, \|.\|).$$

Όταν $E = F$, *γράφουμε* $\mathscr{B}(E)$ *αντί για* $\mathscr{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E).$$

το σύνολο $\mathscr{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ *είναι νόρμα στον γραμμικό χώρο* $\mathscr{B}(E, F)$.
Αν επί πλέον ο F *είναι πλήρης, ο* $\mathscr{B}(E, F)$ *είναι χώρος Banach.*

Ο τοπολογικός δυϊκός

Ορισμός

Έστω $(E, \|.\|)$ *χώρος με νόρμα. Ο* **(τοπολογικός) δυϊκός (topological dual)** *του* E *είναι το σύνολο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων* $f : E \to \mathbb{K}$*. Με τη νόρμα* $\|.\|$*:*

$$\|f\| \equiv \sup\{|f(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

είναι χώρος Banach.

Παρατήρηση: Αν ένας χώρος με νόρμα E είναι πυκνός σε έναν χώρο με νόρμα F, τότε οι τοπολογικοί δυϊκοί τους E^* και F^* «ταυτίζονται» (είναι γραμμικά και ισομετρικά ισόμορφοι). Ειδικότερα, ο τοπολογικός δυϊκός ενός χώρου με νόρμα ταρτίζεται με τον τοπολογικό δυϊκό της πλήρωσής του.

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E, \langle .,. \rangle)$ *είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει χώρος* Hilbert $(H, \langle .,. \rangle)$ *στον οποίο ο* E *εμφυτεύεται γραμμικά και ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος. Ο* H *είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν* $(K, \langle .,. \rangle)$ *είναι χώρος* Hilbert *και* $\psi : E \to K$ γραμμική ισομετρία *με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική* ισομετρία T *από τον* H επί *του* K *ώστε* $T(\phi(x)) = \psi(x)$ *για κάθε* $x \in E$.
Ο χώρος Hilbert $(H, \langle .,. \rangle)$ *λέγεται* ***η πλήρωση*** του $(E, \langle .,. \rangle)$.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "T"] & K \\
\cup & \cup \\
\phi(E) \arrow[r] & \psi(E) \\
E \arrow[u, "\phi"'] \arrow[r, "id"] & E \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Μία υλοποίηση της πλήρωσης

Ονομάζουμε H_1 τον γραμμικό χώρο όλων των αντιγραμμικών απεικονίσεων $f : E \to \mathbb{C}$ (δηλ. $f(x+\lambda y) = f(x) + \bar{\lambda} f(y)$ για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{C}$) που είναι συνεχείς.
Με τη νόρμα $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in E, \|x\| \le 1\}$ ο H_1 είναι χώρος Banach.

Για κάθε $x \in E$, η $\phi_x : E \to \mathbb{C} : y \to \langle x, y \rangle$ ανήκει στον H_1 και η απεικόνιση $\phi : E \to H : x \to \phi_x$ είναι γραμμική ισομετρία.

Ορίζουμε $H = \overline{\phi(E)} \subseteq H_1$ (Είναι αλήθεια ότι $H = H_1$;)

Επεκτείνουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \phi_x, \phi_y \rangle := \langle x, y \rangle$ από τον $\phi(E)$ σε ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ στον H και δείχνουμε ότι η νόρμα του H ικανοποιεί $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle_H$ για κάθε $f \in H$.

Επομένως ο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ είναι μια πλήρωση του $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Παραδείγματα (α) Αν $H = \ell^2$ και $a \in \ell^\infty$, ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).
(β) Αν $H = L^2([0,1])$ και $f \in C([0,1])$, ο συζυγής του πολλαπλασιαστικού τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_f^* = M_{f^*}$.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ *λέγεται* **sesquilinear** ***μορφή*** *αν έχει τις ιδιότητες*
(i) *είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε* $y \in H_2$ *η απεικόνιση* $x \to \phi(x,y) : H_1 \to \mathbb{C}$ *είναι γραμμική.*
(ii) *είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε* $x \in H_1$ *η απεικόνιση* $y \to \overline{\phi(x,y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ *είναι γραμμική.*
Μια sesquilinear μορφή λέγεται ***φραγμένη***, *αν επιπλέον έχει την ιδιότητα*
(iii) $\sup\{|\phi(x,y)| : x \in H_1, y \in H_2, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \equiv \|\phi\| < +\infty.$

Παράδειγμα $\phi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ όπου $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$.
Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : x, y \in H, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x,y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Sesquilinear μορφές

Πρόταση

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} \\ \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathscr{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Ταυτότητα πολικότητας (polarization identity)

$$\begin{aligned} 4\phi(x,y) &= \phi(x+y, x+y) - \phi(x-y, x-y) \\ &\quad + i\phi(x+iy, x+iy) - i\phi(x-iy, x-iy). \end{aligned}$$

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathscr{B}(H_1, H_2) \to \mathscr{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.

(δ) (Όταν $H_1 = H_2$*)* $(TS)^* = S^* T^*$.

(ε) (Όταν $H_1 = H_2$*)* $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Κατηγορίες τελεστών (7)

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) *Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται* **φυσιολογικός (normal)** *αν $T^*T = TT^*$.*
(ii) *Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται* **αυτοσυζυγής (self-adjoint)** *αν $T = T^*$.*
(iii) *Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ λέγεται* **ορθομοναδιαίος (unitary)** *αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$.*

Πρδγ: Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός. Κάθε M_f είναι φυσιολογικός. Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής ανν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t. Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε
$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$, όπου H_i μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε
(i) Ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I_{H_1}$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H_1$.
(ii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

Κατηγορίες τελεστών

Κάθε $T \in \mathscr{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_i = A_i^* \ (i = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) *Ένας τελεστής $T \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται* *θετικός* *(positive) αν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$. Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathscr{B}_+(H)$.*
(ii) *Αν $T, S \in \mathscr{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x\rangle \geq \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathscr{B}_(H)$.*

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathscr{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή

$A \geq B, S \geq T$ και $\lambda \geq \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \Rightarrow A + S \geq B + T$ και $\lambda A \geq \mu B$.

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.
Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

Κατηγορίες τελεστών

Αν $A = A^*$ τότε

$$-\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$$

$$\text{άρα} \quad A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad (\text{διαφορά δυο θετικών})$$

Προβολές

M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}$$
$$x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P)$.

(γ) $\|P\| \leq 1$.

Προβολές

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathscr{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\operatorname{im} P$.*

(δ) *Ο P είναι θετικός.*

(ε) *Ο P είναι αυτοσυζυγής.*

(ζ) *Ο P είναι φυσιολογικός.*

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

Προβολές

Πρόταση

Αν P, Q είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) $P \leq Q$ *(β)* $\|Px\| \leq \|Qx\|$ *για κάθε* $x \in H$
(γ) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$ *(δ)* $QP = P$ *(ε)* $PQ = P$.

Πρόταση

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $P = P(M)$, $Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε
(i) *Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$. Τότε $R = P(M \cap N)$.*
(i') *Ειδικότερα,*

$$M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0.$$

(ii) *Ο τελεστής $S = P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \perp N$. Τότε $S = P(M + N)$.*
(iii) *Ο τελεστής $D = P - Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \supseteq N$. Τότε $D = P(M \cap N^{\perp})$.*

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.
Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N.

$$
\begin{aligned}
P \vee Q &\equiv P(M \vee N) = P(\overline{M+N}) \\
P \wedge Q &\equiv P(M \wedge N) = P(M \cap N).
\end{aligned}
$$

Πρτρ: Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.
(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, τότε $M + N$ κλειστός. (ασκ.)
(β) Αν $M \perp N$, τότε $M + N$ κλειστός. (ασκ.)
(γ) Αν $M = \{(x, 0) : x \in \ell^2\}$ και $N = \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$, τότε όχι.

Προβολές

Πρόταση

Αν $\{Q_i\}$ είναι αύξουσα ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει **κατά σημείο** *στην προβολή $Q = P(M)$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των imQ_i $(i \in \mathbb{N})$.*

(Ανάλογο αποτέλεσμα για φθίνουσες.)

Πρόταση

Έστω $\{P_n\}$ ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H.
(i) *Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$, και $\sum_n P_n x = P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των imP_n $(n \in \mathbb{N})$.*
Για κάθε $x \in H$ ισχύει $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.
(ii) *Αν $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$, τότε οι P_n είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (ι).*

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \mathrm{im}\, T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\mathrm{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathscr{F}(E,F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathscr{F}(E,F) = \{T \in \mathscr{B}(E,F) : \mathrm{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathscr{F}(E) = \mathscr{F}(E,E)$.
Αν H, K είναι χώροι Hilbert, $x \in K$ και $y \in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$$x \otimes y^* : H \to K$$

από τον τύπο $\quad (x \otimes y^*)(z) = \langle z, y \rangle x \quad (z \in H).$

Ο τελεστής $x \otimes y^*$ είναι φραγμένος, και $\|x \otimes y^*\| = \|x\|.\|y\|$.
Κάθε $T \in \mathscr{F}(H,K)$ πρώτης τάξης ($\mathrm{rank}(T) = 1$) είναι αυτής της μορφής (με x, y μη μηδενικά).

Ορισμός

Έστω E,F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T:E\to F$ λέγεται ***συμπαγής (compact)*** *αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E=\{x\in E:\|x\|\le 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T\in\mathscr{K}(E,F)$.*

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.
Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.
Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: $D_a\in\mathscr{B}(\ell^2)$, όπου $a_n=\frac{1}{n}$).
Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό.

Συμπαγείς Τελεστές

$$\mathscr{F}(E,F) \subseteq \mathscr{K}(E,F) \subseteq \mathscr{B}(E,F).$$

Αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.
Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν υπόχωρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.
Ο $D_a \in \mathscr{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.
Παρατήρηση: Ο $\mathscr{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E, F είναι χώροι Banach, $T, S \in \mathscr{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T + \lambda S \in \mathscr{K}(E,F)$.

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή με πεπερασμένης τάξης ή πεπερ. τάξης με φραγμένο είναι πεπερασμένης τάξης.

Λήμμα

Αν E, F, G είναι χώροι Banach,

$$X \in \mathscr{K}(E,F) \text{ και } Y \in \mathscr{B}(F,G) \quad \Rightarrow \quad YX \in \mathscr{K}(E,G), \text{ και}$$
$$A \in \mathscr{B}(E,F) \text{ και } B \in \mathscr{K}(F,G) \quad \Rightarrow \quad BA \in \mathscr{K}(E,G).$$

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathscr{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathscr{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση

Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathscr{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathscr{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης δεν είναι πάντα φραγμένος. Ακόμα κι όταν είναι φραγμένος, δεν είναι πάντα συμπαγής.

Συμπαγείς Τελεστές

Παράδειγμα: Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής.
Απόδειξη. Αν $(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy$ προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Πρόταση

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathscr{B}(H,K)$ τότε

$$T \in \mathscr{K}(H,K) \iff T^*T \in \mathscr{K}(H) \iff T^* \in \mathscr{K}(K,H).$$

Θεώρημα

Έστω E, F χώροι Banach, $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.
(ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $T(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.
(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του E, η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία.
(iv) Το σύνολο $T(\hat{B}_E)$ είναι ολικά φραγμένο.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Ορισμός

Μια ακολουθία $\{x_n\}$ *σ' έναν χώρο με νόρμα* E *συγκλίνει ασθενώς στο* $x \in E$ *αν* $\lim_n y^*(x_n) = y^*(x)$ *για κάθε* $y^* \in E^*$*. Γράφουμε τότε* $x_n \xrightarrow{w} x$*.*

Λήμμα

Κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}$ *σε χώρο με νόρμα είναι* $\|\cdot\|$*-φραγμένη.*

Λήμμα

Κάθε $\|\cdot\|$*-φραγμένη ακολουθία σ' έναν χώρο Hilbert έχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Πρόταση

Έστω E, F *χώροι Banach και* $T : E \to F$ *συμπαγής τελεστής. Αν* $x_n \xrightarrow{w} x$ *στον* E*, τότε* $\|Tx_n - Tx\| \to 0$.

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert,* F *χώρος Banach και* $T : H \to F$ *γραμμική απεικόνιση. Η* T *είναι συμπαγής αν και μόνον αν* $\|Tx_n\| \to 0$ *για κάθε ασθενώς μηδενική ακολουθία* $\{x_n\}$ *στον* H.

Λήμμα

Αν H *χώρος Hilbert,* F *χώρος με νόρμα και* $T \in \mathscr{B}(H, F)$*, τότε ο* T *απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα* $\hat{B}_H$ *του* H *σε κλειστό υποσύνολο του* F.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T : H \to K$ γραμμική απεικόνιση, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής τελεστής.
(ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq H$, το $T(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.
(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του H, η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία.
(iv) Το σύνολο $T(\hat{B}_H)$ είναι ολικά φραγμένο.
(v) Το σύνολο $T(\hat{B}_H)$ είναι συμπαγές.
(vi) Αν $x_n \xrightarrow{w} 0$, τότε $\|Tx_n\| \to 0$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathscr{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.
(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n \rangle \to 0$.
(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

Πόρισμα

Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathscr{B}(H,K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathscr{F}(H,K)$ και $C \in \mathscr{B}(H,K)$ ώστε $\|C\| < \varepsilon$ και $A = B + C$. Λέμε ότι «ο A είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

Συμπαγείς Τελεστές

Πόρισμα

Έστω H, K *χώροι Hilbert και* $A \in \mathscr{B}(H, K)$. *Αν ο* A *είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι* $\overline{\mathrm{im}\, A}$ *και* $(\ker A)^{\perp}$ *είναι διαχωρίσιμοι.*

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \to E$ γραμμική απεικόνιση.
Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται **ιδιοτιμή (eigenvalue)** *της A αν υπάρχει* **μη μηδενικό** *$x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται* **ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** *της A και το σύνολο*

$$M_\lambda \equiv \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

(που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο **ιδιόχωρος (eigenspace)** *της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοτιμών της A συμβολίζουμε $\sigma_p(A)$.*

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι **αναλλοίωτος (invariant)** από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και ότι $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.
(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.
(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \to E$ έχει ιδιοτιμές.
Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Παράδειγμα

Στον χώρο $H = \ell^2$ *θεωρούμε τον τελεστή* T *όπου*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots) \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2.$$

Ο T *είναι συμπαγής, δεν έχει όμως ιδιοτιμές.*

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται **διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable)** αν υπάρχει μια **ορθοκανονική βάση** $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = \{a(n)\}$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $a = \{a(n)\}$ φραγμένη και

$$A = U^{-1} D_a U : \qquad A \overset{u}{\sim} D_a$$

όπου $U : H \to \ell^2 : x_n \to e_n$ unitary. Άρα διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ φυσιολογικός. Όταν $\dim H < \infty$:

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ όπου H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης. Ο A είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Πρόταση

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $A \in \mathscr{B}(H)$. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν οι ιδιόχωροι του είναι ανά δυο κάθετοι και παράγουν τον H.
Το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών είναι αριθμήσιμο. Αν $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ και P_n είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_n που αντιστοιχεί στην λ_n, τότε για κάθε $x \in H$

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

(όπου το άθροισμα συγκλίνει (αν είναι άπειρο) ως προς τη νόρμα του H.

Παράδειγμα

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *συνεχής και* 2π*-περιοδική συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$(K_f g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy.$$

Ο K_f *είναι ολοκληρωτικός τελεστής (με πυρήνα την συνεχή συνάρτηση* $k(x,y)=f(x-y)$*.*
Η $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ *(όπου* $e_n(x)=\exp inx$*) είναι ορθοκανονική βάση του* $L^2([-\pi,\pi])$*.*

$$K_f e_n = \hat{f}(n)e_n \qquad (n\in\mathbb{Z}).$$

Επομένως ο τελεστής K_f *διαγωνοποιείται από την ορθοκανονική βάση* $\{e_n\}$*.*

Λήμμα

Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathscr{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής.
(i) Αν $x \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε

$$Ax = \lambda x \iff A^*x = \bar{\lambda} x.$$

Ειδικότερα, οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς τελεστή (αν υπάρχουν) είναι πραγματικοί αριθμοί.
(ii) Οι ιδιόχωροι που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετοι.
(iii) Κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος από τον A και από τον A^*.

Το Φασματικό Θεώρημα

Λήμμα

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ και M κλειστός υπόχωρος του H.
(i) Ο M είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν ο $M^{\perp}$ είναι A^*-αναλλοίωτος.

Αν $A \in \mathscr{B}(H)$ και $\lambda \in \sigma_p(A)$, τότε $|\lambda| \leq \|A\|$.

Πρόταση

Αν $A \in \mathscr{K}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Πρόταση

Έστω $A \in \mathscr{K}(H)$.

(i) *Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(ii) *Αν $\{x_n\}$ είναι άπειρη ορθοκανονική ακολουθία και υπάρχουν $\lambda_n \in \mathbb{C}$ ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $\{\lambda_n\}$ είναι μηδενική ακολουθία.*

(iii) *Αν ο A είναι φυσιολογικός, το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.*

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^{\perp}$.*
Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^{\perp}$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^{\perp} \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (ο διαγώνιος τελεστής με διαγώνιο την ακολουθία $a = (a_n)$).

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.
(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \quad \text{για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathscr{B}(H)$.
(iii) Ο A είναι φυσιολογικός.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή)

Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{a_n\}$ ώστε

$$\lim_{N\to\infty}\left\|A-\sum_{n=1}^{N} a_n x_n \otimes x_n^*\right\| = 0. \qquad (\star)$$

Τότε η ακολουθία $\{a_n\}$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

Υπενθύμιση: Αν $x \in K, y \in H$ ο τελεστής $x \otimes y^* : H \to K$ ορίζεται από τη σχέση $(x\otimes)y^*(z) = \langle z, y\rangle x$, $z \in H$. Ειδικότερα αν $\|y\| = 1$ ο τελεστής $y \otimes y^*$ είναι η προβολή στον υπόχωρο $[y]$ του H.

Πόρισμα

Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H. Τότε

$$\begin{array}{ll} (i) & \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\} \\ (ii) & \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \end{array}$$

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert)

Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda_n\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathscr{B}(H, K)$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Πρόταση

Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ *η φασματική ανάλυση του συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή* A, *όπου* $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *και* $P_n = P(M_{\lambda_n})$. *Αν* $f : \overline{\sigma_p(A)} \to \mathbb{C}$ *είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε, για κάθε* $x \in H$,

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathscr{B}(H)$. *Η απεικόνιση* $f \to A_f$ *είναι γραμμική, πολλαπλασιαστική (δηλ.* $A_f A_g = A_{fg}$*) και ικανοποιεί* $A_f^* = A_{f^*}$ *(όπου* $f^*(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$*) και* $\|A_f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)**. Όταν η f είναι πολυνώνυμο, τότε $A_f = f(A)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για A_f.

Το Φασματικό Θεώρημα

Πρόταση

Αν A είναι συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H και $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε ή το λ είναι ιδιοτιμή του A ή ο $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος.

Στην πραγματικότητα, το συμπέρασμα της Πρότασης ισχύει για οποιονδήποτε συμπαγή τελεστή σε οποιονδήποτε χώρο Banach.

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Θεώρημα

Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert [3] *H, ή η εξίσωση*

$$x - Kx = y \tag{2}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$, ή αλλιώς *η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση*

$$x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

---

[3] Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Λήμμα

Αν $T \in \mathscr{B}(H)$ *και* $\|T\| < 1$, *ο* $I - T$ *είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το* $\|\cdot\|$*-όριο της σειράς*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Λήμμα

Έστω $K \in \mathscr{B}(H)$ *συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής* $I - K$ *έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.*

Φάσμα συμπαγούς τελεστή

Ορισμός

Φάσμα *(spectrum) ενός φραγμένου τελεστή* $T \in \mathscr{B}(H)$ *ονομάζεται το σύνολο*
$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ ο } T - \lambda I \text{ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο}\}.$

Πρόταση

Αν H *είναι χώρος Hilbert και* $A \in \mathscr{K}(H)$ *το σύνολο* $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *αποτελείται μόνον από ιδιοτιμές του* A *και, αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία.*

Πρόταση

Αν H *είναι χώρος Hilbert,* $A \in \mathscr{K}(H)$ *και* $\varepsilon > 0$*, δεν υπάρχουν άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του* A *που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές* λ *του* A *με* $|\lambda| \geq \varepsilon$*.*