Για το φασματικό θεώρημα

Κάθε διαγωνοποιήσιμος τελεστής σε χώρο Hilbert είναι αναγκαστικά φυσιολογικός. Το αντίστροφο δεν είναι εν γένει αληθές για φραγμένους τελεστές. Όμως

Θεώρημα 1 *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^{\perp}$, υπάρχουν δηλαδή $a_n \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^{\perp}$ ώστε $Ax_n = a_n x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^{\perp} \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (ο διαγώνιος τελεστής με διαγώνιο την ακολουθία $a = (a_n)$).

Τα βήματα της απόδειξης:
(A) Όταν $\dim H < \infty$. [1]
(B1) Όταν $\dim H = \infty$, αλλά $A = A^*$.
(B2) Η γενική περίπτωση.

Χρησιμοποιούνται τα εξής λήμματα:

(Λ.1) Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός και $Ax = ax$ όπου $a \in \mathbb{C}$ τότε $A^*x = \bar{a}x$.

(Λ.2) Συνέπεια: οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή είναι κάθετοι ανά δύο και αναλλοίωτοι από τον A^* (και προφανώς από τον A).

(Λ.3) Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τότε $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leqslant 1\}$.

(Λ.4) Ένας συμπαγής και αυτοσυζυγής τελεστής A έχει πάντα ιδιοτιμές, μάλιστα έχει μια ιδιοτιμή λ ώστε $|\lambda| = \|A\|$.

Άλλες μορφές του Θεωρήματος:

Θεώρημα 2 *Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής φυσιολογικός τελεστής. Τότε οι προβολές στους ιδιοχώρους του είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμησή τους $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ ισχύει*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x \qquad \text{για κάθε } x \in H \qquad \text{και } \ A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα τελεστή ($\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του A).

Θεώρημα 3 *Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{a_n\}$ ώστε*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| A - \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \otimes x_n^* \right\| = 0.$$

Τότε η ακολουθία $\{a_n\}$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

Χρησιμοποιούνται τα εξής λήμματα:

(Λ.5) Αν $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι κάθετες ανά δύο προβολές και (b_n) είναι φραγμένη ακολουθία, τότε
(i) για κάθε $x \in H$ η σειρά $Bx := \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q_n x$ συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο

[1] Δεν χρησιμοποιείται στα επόμενα βήματα.

γραμμικό φυσιολογικό τελεστή $B : H \to H$ με νόρμα $\|B\| = \|b\|_\infty$ που μετατίθεται με κάθε Q_n.

(ii) αν η ακολουθία (b_n) είναι μηδενική, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n Q_n$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα τελεστή (στον B). Στην περίπτωση αυτή, ο B είναι συμπαγής αν και μόνον αν κάθε $b_n Q_n$ έχει πεπερασμένη τάξη.

(Λ.6) Αν ο τελεστής A είναι φυσιολογικός και συμπαγής, το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία. [2]

Συνέπειες του Φασματικού Θεωρήματος

Πόρισμα 4. *Τα* **(Λ.3)** *και* **(Λ.4)** *ισχύουν και για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές (όχι όμως για κάθε συμπαγή τελεστή).*

Πρόταση 5. *Έστω $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση του συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A, όπου $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $P_n = P(M_{\lambda_n})$. Αν $f : \overline{\sigma_p(A)} \to \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε, για κάθε $x \in H$,*

$$A_f x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$. Η απεικόνιση $f \to A_f$ είναι γραμμική, πολλαπλασιαστική (δηλ. $A_f A_g = A_{fg}$) και ικανοποιεί $A_f^* = A_{f^*}$ (όπου $f^*(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$) και $\|A_f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)**. Όταν η f είναι πολυνώνυμο, τότε $A_f = f(A)$. Πράγματι, αν π.χ. $f(t) = t^2$ τότε

$$A^2 x = A \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 P_n x = A_f x$$

για κάθε $x \in H$ και ομοίως $A^m x = A_g x$ όταν $g(t) = t^m$. Γι αυτό το λόγο, συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για A_f.

Πόρισμα 6. *Αν A είναι συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H και $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε ή το λ είναι ιδιοτιμή του A ή ο $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος.* [3]

Θεώρημα 7. (Η γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert)
Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}, \{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda_n\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$. Η $\{x_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου $(\ker A)^\perp = (\ker A^* A)^\perp$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του (συμπαγούς, θετικού) τελεστή $A^* A$, οι αριθμοί λ_n^2 είναι οι αντίστοιχες (μη μηδενικές) ιδιοτιμές και $y_n = \frac{A x_n}{\lambda_n}$.

[2] Το Λήμμα ισχύει για κάθε συμπαγή τελεστή, μάλιστα σε κάθε χώρο Banach.

[3] Και αυτό το Πόρισμα ισχύει για κάθε συμπαγή τελεστή, μάλιστα σε κάθε χώρο Banach.

Απόδειξη Λήμματος 5. (i) Θέτουμε $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n Q_n$. Για κάθε $x \in H$, τα διανύσματα $\{Q_n x : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανά δύο κάθετα. Συνεπώς από το Πυθαγόρειο θεώρημα, αν $k > m$ έχουμε

$$(1) \qquad \left\| \sum_{n=m}^{k} b_n Q_n x \right\|^2 = \sum_{n=m}^{k} \|b_n Q_n x\|^2 \leqslant \max\{|b_i|^2 : m \leqslant i \leqslant k\} \sum_{n=m}^{k} \|Q_n x\|^2.$$

Επειδή $\max\{|b_i|^2 : m \leqslant i \leqslant k\} \leqslant \sup |b_n| = \|b\|_\infty$ και η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i x\|^2$ συγκλίνει (Πρόταση 2.5.12), έπεται από την τελευταία ανισότητα ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\{B_n x\}$ είναι βασική. Θέτουμε $Bx = \lim_n B_n x$ και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $B : x \to Bx$ είναι γραμμική (κατά σημείο όριο γραμμικών απεικονίσεων). Επίσης, από την (1) έχουμε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\|B_k x\|^2 \leqslant \max\{|b_i|^2 : 1 \leqslant i \leqslant k\}.\|x\|^2 \leqslant \|b\|_\infty \|x\|^2$$

$$\text{άρα} \qquad \|Bx\|^2 = \lim_k \|B_k x\|^2 \leqslant \|b\|_\infty \|x\|^2$$

επομένως η B είναι και συνεχής, δηλαδή $B \in \mathcal{B}(H)$ και $\|B\| \leqslant \|b\|_\infty$. Εύκολα βλέπουμε ότι εδώ ισχύει ισότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγοντας $x \in Q_n(H)$ νόρμας 1 έχουμε $Bx = BQ_n x = b_n Q_n x$ (αφού $Q_m Q_n x = 0$ όταν $n \neq m$) άρα

$$|b_n| = \|b_n Q_n x\| = \|BQ_n x\| \leqslant \|B\| \, \|Q_n x\| = \|B\|$$

οπότε $\sup |b_n| \leqslant \|B\|$, οπότε $\|B\| = \|b\|_\infty$.

Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $y \in H$ έχουμε, εφόσον $Q_m Q_n = Q_n Q_m = \delta_{n,m} Q_m$,

$$Q_n Bx = \sum_{m=1}^{\infty} b_m Q_n Q_m y = b_n Q_n y = BQ_n y$$

(αφού $Q_n y \in Q_n(H)$) δηλαδή ο B μετατίθεται με κάθε Q_n.

Έπεται ότι και ο B^* μετατίθεται με κάθε Q_n ($B^* Q_n = (Q_n B)^* = (BQ_n)^* = Q_n B^*$) και συνεπώς με τον B: για κάθε $x \in H$

$$B^* Bx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n B^* Q_n x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q_n B^* x = BB^* x.$$

Δηλαδή ο B είναι φυσιολογικός.

(ii) Υποθέτουμε τώρα ότι $b_n \to 0$. Από την ανισότητα (1) έχουμε

$$\left\| \sum_{n=m}^{k} b_n Q_n \right\| \leqslant \max\{|b_i| : m \leqslant i \leqslant k\}.$$

Αφού η $\{b_n\}$ είναι μηδενική ακολουθία, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $m_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|b_i| \leqslant \epsilon$ για κάθε $i \geqslant m_o$. Έπεται από την τελευταία ανισότητα ότι για κάθε $k > m \geqslant m_o$,

$$\|B_k - B_{m-1}\| = \left\| \sum_{n=m}^{k} b_n Q_n \right\| \leqslant \epsilon.$$

Δηλαδή τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_n b_n Q_n$ αποτελούν βασική ακολουθία ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$, συνεπώς η σειρά συγκλίνει.

Τέλος, αν κάθε $b_n Q_n$ είναι πεπερασμένης τάξης, τότε κάθε B_N είναι συμπαγής οπότε το $\|\cdot\|$-όριό τους, B, είναι συμπαγής. Αντίστροφα αν ο B είναι συμπαγής τότε κάθε $b_n Q_n = BQ_n$ είναι συμπαγής, και άρα αυτομάτως πεπερασμένης τάξης (γιατί αν υπάρχει άπειρη ορθοκανονική ακολουθία (x_i) στον $BQ_n(H)$ τότε η εικόνα της, $(BQ_n x_i) = (b_n x_i)$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία). □

Απόδειξη Πρότασης 5. Από το Λήμμα 5 έπεται ότι ο A_f είναι καλά ορισμένος , φραγμένος και φυσιολογικός και ότι $\|A_f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$. Η σχέση $A_{f+\mu g} = A_f + \mu A_g$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του A_f.

Επίσης, αφού οι P_n είναι αν δύο κάθετες, όπως στην απόδειξη του Λήμματος 5 έχουμε $A_f P_n = f(\lambda_n) P_n$ και συνεπώς, για κάθε $x \in H$,

$$\begin{aligned} A_f A_g x &= A_f \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n) P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n) A_f P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n) f(\lambda_n) P_n x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (fg)(\lambda_n) P_n x = A_{fg} x \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \left\langle A_f^* x, y \right\rangle = \langle x, A_f y \rangle &= \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} \langle x, P_n y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} \langle P_n x, y \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} P_n x, y \right\rangle = \langle A_{f*} x, y \rangle . \qquad \square \end{aligned}$$

Πόρισμα 6. *Αν A είναι συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H και $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, τότε ή το λ είναι ιδιοτιμή του A ή ο $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη Πορίσματος 6. Έστω $\lambda \notin (\sigma_p(A) \cup \{0\})$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 5 για τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{1}{t - \lambda}$. Εφόσον το μόνο πιθανό σημείο συσσώρευσης του $\sigma_p(A)$ είναι το 0, έχουμε $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma_p(A)) := \delta > 0$. Συνεπώς η f είναι φραγμένη στην κλειστή θήκη του $\sigma_p(A)$ (από $1/\delta$) και η πρόταση εφαρμόζεται.

Εφόσον $(A - \lambda I)P_n = P_n(A - \lambda I) = (\lambda_n - \lambda)P_n$ έχουμε, για κάθε $x \in H$,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) A_f x &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)(A - \lambda I) P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda) P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \\ \text{και} \quad A_f (A - \lambda I) x &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n (A - \lambda I) x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda) P_n x = x \end{aligned}$$

δηλαδή ο τελεστής A_f είναι ο αντίστροφος του $(A - \lambda I)$. □