Άσκηση: Οι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι συμπαγείς

Ο στόχος της άσκησης είναι να δείξουμε ότι κάθε ολοκληρωτικός τελεστής T_k με (συνεχή) πυρήνα $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συμπαγής.

Έστω $H = L^2([0,1])$ και $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, δηλ. $k \in C([0,1]^2)$. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό

$$(T_k f)(t) = \int k(t,s) f(s) ds, \quad f \in H.$$

$$\text{Συνεπώς} \qquad \langle T_k f, g \rangle = \iint k(t,s) f(s) \overline{g(t)} ds dt, \quad f, g \in H.$$

Παρατήρησε ότι αν ο πυρήνας είναι της μορφής $k(t,s) = a(t)\overline{b(s)}$ τότε

$$T_k f = \langle f, b \rangle a = (a \otimes b^*) f \tag{1}$$

δηλαδή ο τελεστής T_k είναι πρώτης τάξης.

Ο χώρος Hilbert $L^2([0,1]^2)$ ορίζεται ώς η πλήρωση του χώρου $C([0,1]^2)$ ως προς τη νόρμα

$$\|k\|_{22} = \left(\iint |k(s,t)|^2 ds dt \right)^{1/2}$$

που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle k, h \rangle_{22} = \iint k(s,t) \overline{h(s,t)} ds dt.$$

Παρατήρησε ότι αν $k \in C([0,1]^2)$ τότε

$$\|T_k\| \leqslant \|k\|_{22} . \tag{2}$$

Δείξε πρώτα το ακόλουθο

Λήμμα. *Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική βάση του H. Τότε*
(i) Το σύνολο $\{e_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ όπου $e_{n,m}(t,s) = e_m(t)\overline{e_n(s)}$ είναι ορθοκανονικό στον $L^2([0,1]^2)$.
(ii) Το σύνολο αυτό είναι ορθοκανονική βάση *του $L^2([0,1]^2)$.*

Έπεται ότι κάθε $h \in L^2([0,1]^2)$ (και ειδικότερα κάθε $h \in C([0,1]^2)$) μπορεί να προσεγγισθεί, *ως προς τη νόρμα* $\|\cdot\|_{22}$, από γραμμικούς συνδυασμούς της μορφής

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \lambda_{n,m} e_{n,m}, \quad \lambda_{n,m} \in \mathbb{C}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (1) και (2), δείξε ότι ο τελεστής T_k μπορεί να προσεγγισθεί, *ως προς τη νόρμα τελεστή*, από τελεστές πεπεραμένης τάξης.