Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)
Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο [1] Hilbert H, ή η εξίσωση

$$x - Kx = y \tag{1}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$, ή αλλιώς *η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση*

$$x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Δηλαδή, αν γνωρίζουμε ότι η (1) έχει, για $y = 0$, το πολύ μια λύση (οπότε αποκλείεται το δεύτερο ενδεχόμενο), τότε από την συμπάγεια του τελεστή K συμπεραίνουμε την ύπαρξη λύσης της (1) για κάθε $y \in H$, και μάλιστα ακριβώς μιας. Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέβαια γνωστό όταν $\dim H < +\infty$. Το γεγονός ότι ισχύει σε απειροδιάστατους χώρους είναι μία από τις βασικές αιτίες που οδήγησε στην μελέτη των συμπαγών τελεστών.

Για την απόδειξη, θα χρειασθούμε δύο Λήμματα:

Λήμμα 1 *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\| \cdot \|$-όριο της σειράς*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Απόδειξη Αν θέσουμε

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} T^n$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$(I - T)S_m = S_m(I - T) = I - T^{m+1}$$

επομένως, επειδή $\|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m+1} \to 0$,

$$\lim_m \|(I - T)S_m - I\| = \lim_m \|S_m(I - T) - I\| = \lim_m \|T^{m+1}\| = 0. \tag{2}$$

Όμως η ακολουθία $\{S_m\}$ συγκλίνει. Πράγματι, αν $m > n$,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Επειδή $\|T\| < 1$, έπεται ότι η $\{S_m\}$ είναι βασική ακολουθία στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$, επομένως συγκλίνει σε έναν $S \in \mathcal{B}(H)$. Από την (2) έχουμε ότι $(I - T)S = S(I - T) = I$, άρα $S = (I - T)^{-1}$. $\square$

Λήμμα 2 *Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.*

[1] Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι ο $I-K$ είναι 1-1. Υπάρχει ένας τελεστής $F \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|K-F\|<1$. Αν $K_1 = K-F \in \mathcal{K}(H)$, τότε από το Λήμμα 1 ο τελεστής $I-K_1$ είναι αντιστρέψιμος. Αν $G = F(I-K_1)^{-1}$, παρατηρούμε ότι ο $I-G$ είναι 1-1. Πράγματι, αυτό είναι φανερό, αν παρατηρήσει κανείς ότι [2]

$$I-K = (I-G)(I-K_1) \quad \text{ισοδύναμα} \quad I-G = (I-K)(I-K_1)^{-1}.$$

Όμως ο χώρος $H_o := \operatorname{im} G = \operatorname{im} F$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Θέτουμε $T = (I-G)|_{H_o}$. Ο T απεικονίζει τον H_o στον H_o και είναι 1-1. Επομένως, αφού $\dim H_o < \infty$, ο T απεικονίζει τον H_o επί του H_o. Δηλαδή, για κάθε $v \in H_o$ υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = v$.

Έπεται τώρα ότι $(I-G)(H) = H$. Πράγματι, για κάθε $y \in H$, εφόσον $v = Gy \in H_o$, υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = Gy$. Θέτοντας τώρα $x = y+u$ έχουμε

$$(I-G)x = (y-Gy)+(u-Gu) = (y-Gy)+Gy = y.$$

Από τη σχέση $I-K = (I-G)(I-K_1)$ προκύπτει τώρα ότι και ο $I-K$ είναι επί του H. Κατά συνέπεια, ορίζεται καλά η γραμμική απεικόνιση

$$X = (I-K)^{-1} : H \to H$$

και μένει να δειχθεί ότι είναι φραγμένη. [3]

Έστω ότι δεν είναι. Υπάρχει τότε στον H μια ακολουθία (x_n) απο μοναδιαία διανύσματα ώστε $\|Xx_n\| \ge n$ για κάθε n.

Θέτουμε $y_n = \dfrac{Xx_n}{\|Xx_n\|}$. Αφού ο K είναι συμπαγής και η (y_n) είναι φραγμένη, θα υπάρχει μια υπακολουθία (y_{k_n}) ώστε η (Ky_{k_n}) να συγκλίνει, έστω στο z. Όμως

$$\|(I-K)y_{k_n}\| = \left\|(I-K)\frac{Xx_{k_n}}{\|Xx_{k_n}\|}\right\| = \frac{\|x_{k_n}\|}{\|Xx_{k_n}\|} \le \frac{1}{n}$$

άρα $(I-K)y_{k_n} \to 0$. Εφόσον $Ky_{k_n} \to z$, έχουμε $y_{k_n} \to z$ (άρα $\|z\| = 1$). Από τη συνέχεια του K έπεται ότι $Ky_{k_n} \to Kz$, επομένως $Kz = z$ από τη μοναδικότητα του ορίου. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο $(I-K)$ είναι 1-1. $\square$

Απόδειξη του Εναλλακτικού Θεωρήματος Fredholm.
Έστω ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Δηλαδή, ισοδύναμα, έστω ότι ο πυρήνας $M_1 = \ker(I-K)$ δεν είναι τετριμένος. Τότε είναι πεπερασμένης διάστασης, διότι ο K περιορισμένος στον M_1 είναι ο ταυτοτικός τελεστής, και είναι συμπαγής.

Έστω τώρα ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει μόνον τη μηδενική λύση. Δηλαδή, ο $I-K$ είναι 1-1. Τότε από το Λήμμα 2 ο $I-K$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε για κάθε $y \in H$ η εξίσωση $x - Kx = y$ έχει την μοναδική λύση $x = (I-K)^{-1}y$. $\square$

Η επόμενη Πρόταση συμπληρώνει το Θεώρημα:

Ορισμός 1 **Φάσμα** *(spectrum) ενός φραγμένου τελεστή* $T \in \mathcal{B}(H)$ *ονομάζεται το σύνολο*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \text{ο τελεστής } \lambda I - T \ \text{ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο}\}.$$

[2] $(I-G)(I-K_1) = (I-K_1) - G(I-K_1) = I - K_1 - F = I - K$

[3] Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, δίνουμε όμως μια ανεξάρτητη και στοιχειώδη απόδειξη.

Βεβαίως οι ιδιοτιμές του T ανήκουν στο φάσμα του, όμως δεν το εξαντλούν.[4] Για παράδειγμα, ο τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ με $Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$ δεν έχει ιδιοτιμές, αλλά $0 \in \sigma(T)$ (ο T δεν είναι αντιστρέψιμος).

Πρόταση 3 *Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{K}(H)$ το σύνολο $\sigma(A) \setminus \{0\}$ αποτελείται μόνον από ιδιοτιμές του A και, αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία.*

Απόδειξη Αν το $\lambda \neq 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A, τότε ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι 1-1, άρα το ίδιο ισχύει και για τον $I - \frac{A}{\lambda}$. Επειδή ο $\frac{A}{\lambda}$ είναι συμπαγής, έπεται από το Λήμμα 2 ότι ο $I - \frac{A}{\lambda}$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε και ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος.

Μένει να δειχθεί ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του A, αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία. Απο την επόμενη Πρόταση όμως προκύπτει ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$\left\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| > \frac{1}{n}\right\}$$

είναι πεπερασμένο. Άρα το $\sigma_p(A)$ είναι αριθμήσιμο και έχει μόνο πιθανό σημείο συσσώρευσης το 0. $\square$

Πρόταση 4 *Αν H είναι χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{K}(H)$ και $\epsilon > 0$, δεν υπάρχουν άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ του A με $|\lambda| \geq \epsilon$.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ και μια άπειρη ακολουθία $\{x_n\}$ από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τέτοια ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ όπου $|\lambda_n| \geq \epsilon$ (δεν υποθέτουμε ότι οι λ_n είναι διαφορετικές ανά δύο).

Θέτουμε τότε $N_n = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Ισχυρισμός Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $A(N_n) \subseteq N_n$ και $(A - \lambda_n I)(N_n) \subseteq N_{n-1}$.

Απόδειξη Έστω $y \in N_n$, γράφουμε $y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k$ όπου $\mu_k \in \mathbb{C}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} Ay &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k x_k \in N_n \\ \text{και} \quad (A - \lambda_n I)y &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k(\lambda_k - \lambda_n)x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k(\lambda_k - \lambda_n)x_k + 0x_n \in N_{n-1}. \end{aligned}$$

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Επειδή ο N_{n-1} είναι γνήσιος υπόχωρος του N_n (αφού $x_n \notin [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$) υπάρχει $y_n \in N_n$ με $\|y_n\| = 1$ ώστε $y_n \perp N_{n-1}$.

Τότε, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n > m$ έχουμε $Ay_m \in N_m \subseteq N_{n-1}$ και $(A - \lambda_n I)y_n \in N_{n-1}$, άρα $(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m \in N_{n-1}$ οπότε, αφού $\lambda_n y_n \perp N_{n-1}$, έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$\|Ay_n - Ay_m\|^2 = \|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m + \lambda_n y_n\|^2 = \|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m\|^2 + \|\lambda_n y_n\|^2 \geq |\lambda_n|^2 > \epsilon^2.$$

Επομένως, η ακολουθία $\{Ay_n\}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, ενώ η $\{y_n\}$ είναι φραγμένη. Αφού ο A είναι συμπαγής, έχουμε καταλήξει σε άτοπο. $\square$

[4] Ενώ (σε απειροδιάστατους χώρους) το σύνολο των ιδιοτιμών ενός τελεστή μπορεί να είναι κενό, αποδεικνύεται ότι το φάσμα οποιουδήποτε φραγμένου τελεστή σε χώρο Banach είναι μη κενό.