Ολοκληρωτικοί τελεστές

Υπενθύμιση: Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας γραμμικός τελεστής $A : H \to H$ λέγεται Hilbert - Schmidt αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_i\}$ του H ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 := \|A\|_h^2 < \infty.$$

Αποδεικνύεται ότι η $\|\cdot\|_h$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ορθοκανονικής βάσης. [1] Φαίνεται εύκολα ότι η $\|\cdot\|_h$ είναι νόρμα στον χώρο των τελεστών Hilbert - Schmidt.

Παρατήρηση 1 *Κάθε τελεστής Hilbert - Schmidt είναι φραγμένος και μάλιστα*

$$\|A\|_h \geq \|A\|.$$

Απόδειξη Για κάθε x στον πυκνό υπόχωρο $[e_i : i \in \mathbb{N}]$ έχουμε $x = \sum_i^N \langle x, e_i \rangle e_i$ επομένως

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_i^N \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_i \langle x, e_i \rangle Ae_i \\ \text{άρα} \quad \|Ax\| &\leq \sum_i^N |\langle x, e_i \rangle| \, \|Ae_i\| \leq \left(\sum_i^N |\langle x, e_i \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_i^N \|Ae_i\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|x\| \left(\sum_i^\infty \|Ae_i\|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \, \|A\|_h . \end{aligned}$$

Επομένως ο A είναι φραγμένος στον πυκνό υπόχωρο $[e_i : i \in \mathbb{N}]$ από $\|A\|_h$, κατά συνέπεια είναι φραγμένος στον H και η νόρμα του φράσσεται από $\|A\|_h$. □

Παρατήρηση 2 *Μάλιστα κάθε τελεστής Hilbert - Schmidt είναι συμπαγής.*

Πράγματι, αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ονομάσουμε P_k την προβολή στον υπόχωρο $[e_1, \ldots, e_k]$ τότε η P_k είναι φραγμένος τελεστής πεπερασμένης τάξης και συνεπώς (αφού ο A είναι φραγμένος) το ίδιο ισχύει και για τον AP_k. Όμως

$$\begin{aligned} \|A - AP_k\| \leq \|A - AP_k\|_h &= \sum_{i=1}^{\infty} \|(A - AP_k)e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

[1] Για τη συζήτηση που ακολουθεί αρκεί κανείς να σταθεροποιήσει μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $H = L^2([0,1])$ που να αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις.

άρα ο A είναι $\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης, άρα συμπαγής. $\square$

Ολοκληρωτικός τελεστής [2] *με συνεχή πυρήνα* την συνάρτηση $k \in C([0,1] \times [0,1])$ λέγεται ο τελεστής $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ που ορίζεται από την σχέση:

$$(Kf)(t) = \int k(t,s)f(s)ds \qquad f \in C([0,1])$$

και επεκτείνεται, επειδή είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής, σ' όλον τον $L^2([0,1])$. Μάλιστα έχουμε $\|K\| \leq \|k\|_{22}$, όπου $\|\cdot\|_{22}$ είναι η νόρμα του $L^2([0,1] \times [0,1])$:

$$\|k\|_{22}^2 = \int\int |k(x,y)|^2 dxdy.$$

Θα δείξουμε ότι όλοι οι ολοκληρωτικοί τελεστές (αυτής της μορφής) είναι Hilbert - Schmidt.

Λήμμα 3 *Έστω $\mathcal{A} \subseteq C([0,1] \times [0,1])$ ο γραμμικός χώρος όλων των συναρτήσεων k της μορφής $k(t,s) = \sum_{j=1}^N g_j(t)\bar{h}_j(s)$ όπου $g_j, h_j \in C([0,1])$. Η απεικόνιση*

$$\Phi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{22}) \to (\mathcal{F}(L^2([0,1])), \|\cdot\|_h) : \quad k \to K$$

είναι (γραμμική) ισομετρία.

Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι, αν η συνάρτηση k είναι όπως στο Λήμμα, ο αντίστοιχος ολοκληρωτικός τελεστής έχει πεπερασμένη τάξη:

$$Kf = \sum_{j=1}^N \langle f, h_j \rangle g_j \quad \text{δηλαδή} \quad K = \sum_{j=1}^N g_j \otimes h_j^*.$$

Μπορώ να υποθέσω[3] ότι η οικογένεια $\{g_j : j = 1, \ldots, N\}$ είναι ορθοκανονική. Τότε θα έχω

$$\|Kf\|_2^2 = \sum_j |\langle f, h_j \rangle|^2$$

για κάθε $f \in C([0,1])$. Ξέρουμε όμως ότι υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $H = L^2([0,1])$ που αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις. Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση για $f = e_n$ και αθροίζοντας, έχουμε

$$\sum_{n=1}^\infty \|Ke_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^N |\langle e_n, h_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^\infty |\langle e_n, h_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^N \|h_j\|^2$$

[2] Γενικότερα, ολοκληρωτικός τελεστής λέγεται κάθε τελεστής στον L^2 που ορίζεται από ένα ολοκλήρωμα όπως ο K. Το πεδίο ορισμού του είναι το σύνολο των $f \in L^2$ για τις οποίες το ολκλήρωμα έχει έννοια και ορίζει στοιχείο του L^2.

[3] Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η τάξη του K είναι N. Αν $g_1', \ldots, g_N'$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου $\operatorname{im} K$ και $k_j' = K^* g_j'$ τότε για κάθε f έχουμε $Kf = \sum_j \langle Kf, g_j' \rangle g_j' = \sum_j \langle f, K^* g_j' \rangle g_j'$, άρα $Kf = \sum_j (g_j' \otimes k_j'^*) f$.

(η τελευταία ισότητα έπεται από το γεγονός ότι η $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση. Δηλαδή

$$\|K\|_h^2 = \sum_j \|h_j\|^2.$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $s \in [0,1]$, αν k_s είναι η συνεχής συνάρτηση $k_s = \sum_j \bar{h}_j(s) g_j$, τότε $k(s,t) = k_s(t)$ άρα

$$\int |k(t,s)|^2 dt = \int |k_s(t)|^2 dt = \|k_s\|^2 = \left\| \sum_j \bar{h}_j(s) g_j \right\|^2 = \sum_j |h_j(s)|^2$$

εφόσον τα $\{g_j\}$ είναι ορθοκανονικά και $\bar{h}_j(s) \in \mathbb{C}$. Επομένως

$$\|k\|_{22}^2 = \int \left(\int |k(t,s)|^2 dt \right) ds = \int \sum_j |h_j(s)|^2 ds = \sum_j \|h_j\|^2 = \|K\|_h^2. \qquad \square$$

Έστω τώρα μια συνεχής συνάρτηση $k \in C([0,1] \times [0,1])$. Μπορούμε τότε να βρούμε (γιατί;) μια ακολουθία (k_n) απο πολυώνυμα δύο μεταβλητών (και άρα $k_n \in \mathcal{A}$) ώστε

$$\|k - k_n\|_{22} \to 0.$$

Αν $K_n = \Phi(k_n)$, η ακολουθία (K_n) είναι $\|\cdot\|_h$-βασική, αφού η (k_n) είναι $\|\cdot\|_{22}$-βασική και $\|K_n\|_h = \|k_n\|_{22}$. Κατά συνέπεια είναι φραγμένη: υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\sup_n \|K_n\|_h \leq M$.

Δηλαδή, αν (e_j) είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([0,1]$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $J \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j-1}^{J} \|K_n e_j\|^2 \leq \|K_n\|_h^2 \leq M.$$

Επίσης, αν $K = \Phi(k)$, έχουμε

$$\|K - K_n\| \leq \|k - k_n\|_{22} \to 0,$$
$$\text{και συνεπώς} \qquad \lim_n \|Ke_j - K_n e_j\| = 0$$

για καθε j. Έπεται ότι, για κάθε $J \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{J} \|Ke_j\|^2 = \lim_n \sum_{j=1}^{J} \|K_n e_j\|^2 \leq \sup_n \sum_{j=1}^{J} \|K_n e_j\|^2 \leq M$$
$$\text{και άρα} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|Ke_j\|^2 \leq M$$

οπότε ο K είναι Hilbert - Schmidt.