Γραμμικοί Τελεστές (712)
Μια παρατήρηση

Πρόταση 1 *Έστω* [1] $(E, \|\cdot\|_E)$ *χώρος νε νόρμα πεπερασμένης διάστασης* N. *Για κάθε αλγεβρική βάση* $\{e_1, \ldots, e_N\}$ *του* E, *η απεικόνιση*

$$T : (\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_E) : (a(1), \ldots a(N)) \to \sum_{k=1}^{N} a(k)e_k$$

είναι γραμμικός και τοπολογικός ισομορφισμός (δηλ. είναι 1-1, επί, γραμμική, συνεχής και η T^{-1} *είναι συνεχής).*

Απόδειξη Είναι φανερό ότι ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Επίσης είναι συνεχής γιατί για κάθε $(a(1), \ldots a(N)) \in \mathbb{C}^N$ έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} a(k)e_k\right\|_E^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |a(k)|\, \|e_k\|_E\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{N} |a(k)|^2 \sum_{k=1}^{N} \|e_k\|_E^2 \leq M^2 \left\|(a(1), \ldots a(N))\right\|_2^2$$

όπου $M = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \|e_k\|_E^2}$. Για να δείξω ότι ο T^{-1} είναι συνεχής, αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε για κάθε $(a(1), \ldots, a(N)) \in \mathbb{C}^N$ να έχουμε

$$\left\|T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N} a(k)e_k\right)\right\|_2 \leq \lambda \left\|\sum_{k=1}^{N} a(k)e_k\right\|_E$$

$$\text{ή ισοδύναμα} \quad \delta \left\|(a(1), \ldots, a(N))\right\|_2 \leq \left\|\sum_{k=1}^{N} a(k)e_k\right\|_E$$

(όπου $\delta = 1/\lambda$). Έστω

$$S = S_1(0,1) = \left\{(a(1), \ldots, a(N)) \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |a(k)|^2 = 1\right\}.$$

Είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2)$, επομένως είναι συμπαγές(!) . Η απεικόνιση

$$f : S \to \mathbb{R}_+ : (a(1), \ldots, a(N)) \to \left\|\sum_{k=1}^{N} a(k)e_k\right\|_E$$

είναι συνεχής (σύνθεση της T με την $\|\cdot\|_2$), άρα παίρνει ελάχιστη τιμή στην S. Δηλαδή υπάρχει $b = (b(1), \ldots, b(N)) \in S$ ώστε $f(b) \leq f(a)$ για κάθε $a \in S$.

Παρατήρησε όμως ότι $f(b) > 0$, γιατί αν $f(b) = 0$ τότε $\left\|\sum_{k=1}^{N} b(k)e_k\right\|_E = 0$ δηλαδή $\sum_{k=1}^{N} b(k)e_k = 0$ το οποίο αποκλείεται, αφού τα $e_1, \ldots, e_N$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $(b(1), \ldots, b(N)) \neq 0$.

Θέτοντας λοιπόν $\delta = f(b)$, για κάθε $a = (a(1), \ldots, a(N)) \in \mathbb{C}^N$, εφόσον $\frac{a}{\|a\|_2} = 1$, έχουμε

$$f\left(\frac{a}{\|a\|_2}\right) \geq f(b) = \delta$$

$$\text{δηλαδή} \quad \left\|\sum_{k=1}^{N} \frac{a(k)}{\|a\|_2} e_k\right\|_E \geq \delta \qquad \text{άρα} \qquad \left\|\sum_{k=1}^{N} a(k)e_k\right\|_E \geq \delta \|a\|_2 .$$

[1] equival, 24/3/2011

Παρατήρηση 2 *Στην περίπτωση που η νόρμα $\|\cdot\|_E$ προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο, $\|x\|_E = \langle x, x\rangle^{1/2}$ για κάθε $x \in E$ και η βάση είναι ορθοκανονική, η πρόταση αποδεικνύεται άμεσα, χωρίς το προηγούμενο επιχείρημα συμπάγειας.*

Πράγματι,

$$\|(a(1), \ldots, a(N))\|_2^2 = \sum_{k=1}^N |a(k)|^2 = \left\| \sum_{k=1}^N a(k)e_k \right\|_E^2$$

από το Πυθαγόρειο Θεώρημα!

Πόρισμα 3 *Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, για κάθε $m = 1, \ldots, N$ η απεικόνιση*

$$(E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{C} : \sum_{k=1}^N a(k)e_k \to a(m)$$

είναι συνεχής γραμμική μορφή.

Πράγματι, είναι η σύνθεση του T^{-1} με την προβολή $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{C}$ στην m-οστή συντεταγμένη.

Πόρισμα 4 (α) *Κάθε χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης.*

(β) *Αν $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ είναι δύο νόρμες σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης E, τότε η ταυτοτική απεικόνιση $(E, \|\cdot\|_b) \to (E, \|\cdot\|_a)$ είναι ομοιομορφισμός. Ισοδύναμα, υπάρχουν θετικές σταθερές A, B ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $A\|x\|_a \le \|x\|_b \le B\|x\|_a$.*

(γ) *Αν F είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα, τότε είναι κλειστός.*

(δ) *Αν E είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα, κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές.*

Απόδειξη *(α)* Η απεικόνιση T^{-1} της Πρότασης στέλνει βασικές ακολουθίες του E σε βασικές ακολουθίες του $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2)$, ο οποίος είναι πλήρης.

(β) Οι τελεστές

$$T_a : (\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_a) : (a(1), \ldots a(N)) \to \sum_{k=1}^N a(k)e_k$$

$$\text{και} \quad T_b : (\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_b) : (a(1), \ldots a(N)) \to \sum_{k=1}^N a(k)e_k$$

και οι αντίστροφοί τους είναι φραγμένοι. Επομένως ο τελεστής

$$T_{ab} : (E, \|\cdot\|_b) \xrightarrow{T_b^{-1}} (\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2) \xrightarrow{T_a} (E, \|\cdot\|_a)$$

και οι αντίστροφός του είναι φραγμένος. Για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\|x\|_a = \|T_{ab}(x)\|_a \le \|T_{ab}\| \|x\|_b \qquad \text{και} \qquad \|x\|_b = \left\|T_{ab}^{-1}(x)\right\|_b \le \left\|T_{ab}^{-1}\right\| \|x\|_a$$

$$\text{άρα} \quad \frac{1}{\|T_{ab}\|} \|x\|_a \le \|x\|_b \le \left\|T_{ab}^{-1}\right\| \|x\|_a \,.$$

(γ) Ο F είναι πλήρης.

(δ) Ο E είναι ομοιομορφικός με τον $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2)$, στον οποίο τα κλειστά και φραγμένα είναι συμπαγή.

Παρατήρηση 5 *Το (δ) δεν ισχύει σε κανέναν απειροδιάστατο χώρο με νόρμα.*

Στην περίπτωση απειροδιάστατου χώρου $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, η απόδειξη είναι πολύ εύκολη: υπάρχει άπειρη ορθοκανονική ακολουθία $\{e_1, e_2, \ldots\}$ στον E. Αυτή δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, καθώς $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ όταν $n \neq m$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα!).

Άρα η κλειστή μοναδιαία μπάλα δεν είναι συμπαγής.

Η απόδειξη γενικεύεται σε χώρους με νόρμα, πάλι με ένα επιχείρημα συμπάγειας: κατασκευάζει κανείς επαγωγικά μια άπειρη ακολουθία $\{x_1, x_2, \ldots\}$ ώστε $\|x_n - x_m\| \ge 1$ όταν $n \neq m$ (δες π.χ. Λήμμα 3.3.4).