Γραμμικοί Τελεστές (712)

Εξετάσεις 30 Αυγούστου 2016

Στα ακόλουθα, H είναι ένας χώρος Hilbert.

1. Έστω $E = C([0,1])$ ο υπόχωρος του χώρου Hilbert $L^2([0,1])$. Εξετάστε αν η απεικόνιση $E \to \mathbb{C} : f \to f(0)$ επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική απεικόνιση $L^2([0,1]) \to \mathbb{C}$. **1.5μ**

2. Αν $\{a_{i,j} : i,j \in \mathbb{N}\}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί με $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 < \infty$, δείξτε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ με $\langle Ae_j, e_i \rangle = a_{i,j}$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. [Υπόδειξη: εξετάστε την απεικόνιση ϕ με $\phi(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x(j)\overline{y(i)}$ όπου $x = (x(i)), y = (y(i)) \in \ell^2$.] **1.5μ**

3. Δείξτε ότι ο $S : \ell^2 \to \ell^2$ με $S : e_n \to e_{n+1}$ δεν έχει ιδιοτιμές. Βρείτε τις ιδιοτιμές του S^*. **2μ**

4. (α) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθή προβολή, αποδείξτε ότι $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$.

   (β) Αν $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθές προβολές, αποδείξτε ότι $\mathrm{im}(P) \subseteq \mathrm{im}(Q)$ αν και μόνον αν $P \leq Q$. **1.5μ**

5. Έστω $V \in \mathcal{B}(H)$ με $VV^*V = V$. Αν $E := (\ker V)^\perp$, δείξτε ότι ο τελεστής $U = V|_E$ είναι ισομετρία επί του $F := V(E)$ και ότι ο $U^{-1} : F \to E$ ικανοποιεί $U^{-1} = V^*|_F$. **2μ**

6. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του T, δείξτε ότι ο T είναι φυσιολογικός.

   Ποιά επιπλέον συνθήκη ισοδυναμεί με την
   (α) $T = T^*$;
   (β) T συμπαγής; **2μ**

7. Δείξτε ότι μια αύξουσα ακολουθία προβολών (Q_n) συγκλίνει *κατά σημείο* στην προβολή Q πάνω στην κλειστή (γραμμική) θήκη της ένωσης των $Q_n(H)$. Συγκλίνει η (Q_n) ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$; **2μ**

Καλή επιτυχία!