Γραμμικοί Τελεστές

Εξετάσεις 3 Φεβρουαρίου 2000

1. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Να ορισθεί ο τελεστής T^* και να αποδειχθεί ότι $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

2. Έστω $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots)$ όπου $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$. Να δειχθεί ότι $A(\ell^2) \subseteq \ell^2$, ότι ο A είναι φραγμένος και να βρεθεί η νόρμα του.

3. Αν $a_n \in \mathbb{C}$, θέτουμε $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$ όπου $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$. Να δειχθεί ότι ο T ορίζει συμπαγή τελεστή από τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν και μόνον αν $a_n \to 0$.

4. Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής θετικός τελεστής. Να εκφρασθεί η (μοναδική) θετική τετραγωνική ρίζα του A συναρτήσει των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A και να δειχθεί ότι είναι συμπαγής.

5. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθές προβολές, διατυπώστε και αποδείξτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο τελεστής $P+Q$ να είναι προβολή, και βρείτε το $\mathrm{ran}(P+Q)$.

6. Έστω $H = L^2([0,1])$ και $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f : H \to H$ είναι φραγμένος και φυσιολογικός. Είναι δυνατόν να είναι ο M_f προβολή·

7. Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι $\ker A = (\mathrm{ran}(A^*))^\perp$ και ότι $\ker A = \ker A^*A$.

Να γραφούν πέντε θέματα.

Καλή επιτυχία!