Γραμμικοί Τελεστές

Εξετάσεις 25 Σεπτεμβρίου 2001

1. (2 μονάδες) Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Να ορισθεί πλήρως ο τελεστής T^* και να αποδειχθεί ότι ισχύει $T^*T = TT^*$ αν και μόνον αν $\|T^*x\| = \|Tx\|$ για κάθε $x \in H$.

2. (2 μονάδες) Έστω H χώρος Hilbert και $U \in \mathcal{B}(H)$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- (ι) $U^*U = I$
- (ιι) Ο U είναι ισομετρία.

Είναι ο U αναγκαστικά φυσιολογικός;

3. (2,5 μονάδες) Αν $\{a_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών, θέτουμε

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$$

όπου $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$. Να βρεθεί ο T^* και να υπολογισθεί η $\|T\|$. Πότε είναι ο T συμπαγής τελεστής;

4. (2 μονάδες) Έστω H χώρος Hilbert. Αν $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθές προβολές, διατυπώστε και αποδείξτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο τελεστής PQ να είναι ορθή προβολή, και βρείτε το $\text{ran}(PQ)$ όταν ο PQ είναι προβολή.

5. (2,5 μονάδες) Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Αν ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του A, δείξτε ότι $\lambda \geq 0$. Αν επιπλέον ο A είναι συμπαγής, να εκφρασθεί η (μοναδική) θετική τετραγωνική ρίζα του A συναρτήσει των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A και να δειχθεί ότι είναι συμπαγής.

6. (2 μονάδες) Έστω $H = L^2([0,1])$ και $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f : H \to H$ είναι φραγμένος και φυσιολογικός.

Καλή επιτυχία!