Γραμμικοί Τελεστές (712)
Ασκήσεις III
14 Μαΐου 2006

Άσκηση 1 Έστω H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν θετικοί τελεστές A_+, A_- ώστε $A_+A_- = 0 = A_-A_+$ και $A = A_+ - A_-$.
(Υπόδειξη: εξετάστε πρώτα την ειδική περίπτωση $A = D_a$.)

Άσκηση 2 **(i)** Έστω E γραμμικός χώρος, M γραμμικός υπόχωρος του E. Αν N_1 και N_2 είναι συμπληρώματα του M και αν $N_1 \subseteq N_2$, τότε $N_1 = N_2$.
(ii) Έστω H χώρος Hilbert και M, N κλειστοί υπόχωροι του H.Αν $N^\perp \subseteq M$, τότε $M + N = H$.
Αν επιπλέον $M \cap N = \{0\}$, τότε (οι M, N είναι συμπληρωματικοί και μάλιστα) ισχύει $N^\perp = M$.

Άσκηση 3 Έστω P, Q (ορθές) προβολές σ' έναν χώρο Hilbert.
(α) Ο τελεστής $P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $P + Q \leq I$.
(β) Ισχύει η ισοδυναμία $(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP$ (πρβλ. Πρόταση 2.5.9).

Άσκηση 4 Αν H είναι χώρος Hilbert και P, Q είναι οι προβολές στους υποχώρους M και N αντίστοιχα, δείξτε ότι $P(M \cap N)x = \lim_n (PQP)^n x$ για κάθε $x \in H$.

Άσκηση 5 Αν H είναι χώρος Hilbert και $x, y \in H$ ορίζουμε τον τελεστή $x \otimes y^*$ από τον τύπο
$(x \otimes y^*)(z) = \langle z, y\rangle x \quad (z \in H)$ (πρβλ. τον Ορισμό 3.1.2). Να δειχθεί ότι όλοι οι φραγμένοι τελεστές πρώτης τάξης είναι αυτής της μορφής και να εξετασθεί πότε ο $x \otimes y^*$ είναι φυσιολογικός, πότε είναι αυτοσυζυγής και πότε είναι ορθή προβολή.
Να δειχθεί επίσης ότι $x \otimes y^* = z \otimes w^*$ αν και μόνον αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $z = \bar{\lambda}x$ και $y = \lambda w$.

Άσκηση 6 Δείξτε ότι ένας διαγώνιος τελεστής D_a $(a \in \ell^\infty)$ στον ℓ^2 είναι ένα προς ένα αν και μόνον αν $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Δείξτε επίσης ότι ο D_a είναι πεπερασμένης τάξης αν και μόνον αν $a \in c_{oo}$.

Άσκηση 7 Αν $\{x_i\}, \{y_i\}$ είναι δύο ορθοκανονικές οικογένειες στον χώρο Hilbert H και $\lambda_i \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι ο τελεστής $T = \sum_1^n \lambda_i x_i \otimes y_i^*$ έχει νόρμα $\|T\| = \max |\lambda_i|$.

Άσκηση 8 Είναι δυνατόν μια ισομετρία σ' έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert να είναι πεπερασμένης τάξης; Να είναι $\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης;

Άσκηση 9 Αν $\{e_n\}$ είναι η συνήθης βάση του χώρου Hilbert $H = \ell^2$, να δειχθεί ότι δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $A : H \to H$ ώστε $\langle Ae_n, e_m\rangle = 1$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 10 (i) Έστω H χώρος Hilbert, $B \in \mathcal{K}(H)$. Αν $A_n, A \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A_n x - Ax\| \to 0$ για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι $\|BA_n - BA\| \to 0$ και $\|A_n B - AB\| \to 0$. Αν $\{P_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία προβολών και $P = \vee P_n$ είναι η προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν οι $P_n(H)$, δείξτε ότι $\|BP_n - BP\| \to 0$ και $\|P_n B P_n - PBP\| \to 0$.

(ii) Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, δείξτε ότι μπορούν να βρεθούν προβολές P_n πεπερασμένης τάξης ώστε $\vee P_n = I$. Χρησιμοποιώντας το (i), δώστε μια άλλη απόδειξη ότι κάθε συμπαγής τελεστής στον H προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$ από τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Άσκηση 11 Αν $a = \{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, ορίζω

$$S_a x = (0, a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots), \quad x \in \ell^2.$$

Να δειχθεί **(i)** ότι ο S_a ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν η a είναι φραγμένη ακολουθία, και τότε $\|S_a\| = \|a\|_\infty$
(ii) ότι ο S_a ορίζει συμπαγή τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν $a \in c_0$.

Άσκηση 12 Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\mathbb{N})$, και $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ ο τελεστής της μετατόπισης $e_n \to e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, δείξτε ότι ο S δεν έχει καμμιά ιδιοτιμή.
Δείξτε επίσης ότι ένας $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του συζυγή τελεστή S^* αν και μόνον αν $|\lambda| < 1$ και ότι ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι μονοδιάστατος και παράγεται από το διάνυσμα $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$.
Δείξτε τέλος ότι η οικογένεια $\{x_\lambda : |\lambda| < 1\}$ παράγει τον $\ell^2(\mathbb{N})$.