Γραμμικοί Τελεστές (712)
Ασκήσεις ΙΙ
2 Απριλίου 2006

Άσκηση 1 Έστω $a = \{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$ τυχούσα ακολουθία. Θέτουμε

$$D_a x = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \ldots) \quad (x \in \ell^2).$$

(α) Ο D_a ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν η a είναι φραγμένη ακολουθία. Τότε $\|D_a\| = \|a\|_\infty$.
(β) Αν η a δεν είναι φραγμένη ακολουθία, τότε υπάρχει $x \in \ell^2$ ώστε $D_a x \notin \ell^2$.
(γ) Να βρεθεί ο συζυγής τελεστής D_a^* και να δειχθεί ότι ο D_a είναι φυσιολογικός.
(δ) Να δειχθεί ότι ο D_a είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $a_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n, θετικός αν και μόνον αν $a_n \geq 0$ για κάθε n και ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν $|a_n| = 1$ για κάθε n.
(ε) Να εξετασθεί πότε ο D_a είναι ορθή προβολή και να βρεθεί τότε ο υπόχωρος επί του οποίου προβάλλει.

Άσκηση 2 Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\mathbb{N})$, δείξτε ότι η απεικόνιση $e_n \to e_{n+1}\,(n \in \mathbb{N})$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ που ικανοποιεί

$$Sx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \ell^2.$$

Βρείτε τον συζυγή τελεστή S^*. Δείξτε ότι οι S και S^* έχουν νόρμα 1, και ότι ο S είναι ισομετρία, ενώ ο S^* όχι. Δείξτε επίσης ότι ισχύει $S^* \circ S = I$, και υπολογίστε τον τελεστή $S \circ S^*$.
(*) Υπάρχει $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ ώστε $T^2 = S$; [Υπόδειξη: Ποιός είναι ο $\ker S^*$ και ο $\ker T^*$;]

Άσκηση 3 Αν H είναι χώρος Hilbert με $\dim H > 1$, να βρεθεί ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι φυσιολογικός.

Άσκηση 4 Έστω H χώρος Hilbert με $\dim H < +\infty$. Να δειχθεί ότι

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν ο πίνακας του (t_{ik}) ως προς *οποιαδήποτε* ορθοκανονική βάση του H είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή $t_{ik} = \bar{t}_{ki}$ για κάθε i, k.

(ii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν απεικονίζει κάποια (ισοδύναμα, κάθε) ορθοκανονική βάση του H σε ορθοκανονική *βάση* του H.

(iii) Ο T είναι θετικός αν και μόνον αν είναι αυτοσυζυγής και οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Άσκηση 5 Αν $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, θέτουμε

$$(A_k f)(x) = \int k(x,y) f(y) dy, f \in C([0,1]). \qquad (*)$$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $A_k f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, και ότι ο τελεστής A_k επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή του $L^2([0,1])$ με νόρμα $\|A_k\| \leq \|k\|_{22}$, όπου

$$\|k\|_{22}^2 = \iint |k(x,y)|^2 dx dy.$$

Να εξετασθεί αν ισχύει $\|A_k\| = \|k\|_{22}$.
Να δειχθεί ότι ο συζυγής τελεστής είναι ο $A_k^* = A_h$, όπου $h(x,y) = \overline{k(y,x)}$.

Άσκηση 6 Αν $H = L^2([0,1])$, το σύνολο $\{M_f : f \in C([0,1])\}$, όπου $M_f(g) = fg (g \in C([0,1])$, αποτελείται από φυσιολογικούς τελεστές. Ο M_f είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε $t \in [0,1]$, θετικός αν και μόνον αν $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ και ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν $|f(t)| = 1$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Άσκηση 7 Έστω H χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$, και $B, C \in \mathcal{B}_+(H)$. Τότε ο τελεστής A^*BA είναι πάντα θετικός, και ο BC^2 είναι θετικός αν και μόνον αν οι B και C μετατίθενται.
(*) Τι μπορείτε να πείτε για τον BC;

Άσκηση 8 Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με
$T \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} x + Ay \\ A^* x + y \end{smallmatrix} \right)$, δηλαδή $T = \left(\begin{smallmatrix} I & A \\ A^* & I \end{smallmatrix} \right)$. Να δειχθεί ότι $\|A\| \leq 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.

Άσκηση 9 Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Να δειχθεί ότι $(A(H))^\perp = \ker(A^*)$ και $\ker A = (A^*(H))^\perp$. Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$. Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H)$; [Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2, για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]