Μιά άσκηση

Η σειρά Fourier της $f = \chi_{[a,b]}$, όπου $[a,b] \subset (-\pi,\pi)$.

Γράφουμε[1] $[a,b] = [-d+c, d+c]$. Έχουμε $\hat{f}(0) = \dfrac{b-a}{2\pi} = \dfrac{d}{\pi}$ και, αν $k \neq 0$,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_a^b = \frac{\sin(kd)}{\pi k}e^{-ikc}.$$

Επομένως

$$S_n(f,x) = \frac{d}{\pi} + \sum_{0<|k|\le n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{d}{\pi} + \sum_{0<|k|\le n} \frac{\sin(kd)}{\pi k}e^{ik(x-c)}.$$

Σε κάθε σημείο $x \in [-\pi,\pi] \setminus \{a,b\}$, η f είναι παραγωγίσιμη, οπότε ισχύει ότι $S_n(f,x) \to f(x)$ (όπως έχουμε αποδείξει).

Τι γίνεται στα σημεία a και b όπου η f παρουσιάζει ασυνέχειες;

$$\begin{aligned} S_n(f,a) &= \frac{d}{\pi} + \sum_{0<|k|\le n} \frac{\sin(kd)}{\pi k}e^{-ikd} \\ &= \frac{d}{\pi} + \sum_{0<|k|\le n} \frac{\sin(kd)\cos(kd)}{\pi k} - i\sum_{0<|k|\le n}\frac{\sin^2(kd)}{\pi k} \\ &= \frac{d}{\pi} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kd)\cos(kd)}{\pi k} + 0 \end{aligned}$$

γιατί η $k \mapsto \frac{\sin(kd)\cos(kd)}{\pi k}$ είναι άρτια ενώ η $k \mapsto \frac{\sin^2(kd)}{\pi k}$ είναι περιττή και η άθροιση γίνεται στο σύνολο $\{k \in \mathbb{Z} : 0 < |k| \le n\}$ που είναι συμμετρικό ως προς το 0.

Τελικώς λοιπόν

$$S_n(f,a) = \frac{d}{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2kd)}{\pi k}.$$

που, όπως γνωρίζουμε, συγκλίνει από το κριτήριο Dirichlet. Ομοίως δείχνουμε ότι και η $(S_n(f,b))_n$ συγκλίνει.

Για να βρούμε την *τιμή* του ορίου, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Σύμφωνα με το Θεώρημα του Fejér οι *μέσοι όροι* $\sigma_n(f,a)$ συγκλίνουν (όταν υπάρχουν άλματα) στην τιμή $\dfrac{f(a_+)+f(a_-)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Όμως, αφού η ακολουθία $(S_n(f,a))$ είναι συγκλίνουσα, το όριό της είναι το ίδιο με το όριο της $(\sigma_n(f,a))$, δηλαδή $S_n(f,a) \to \dfrac{1}{2}$. Ομοίως, $S_n(f,b) \to \dfrac{1}{2}$.

Συμπέρασμα: $S_n(f,x) \to f(x)$ για κάθε $x \notin \{a,b\}$ και $S_n(f,x) \to \frac{1}{2}$ όταν $x = a$ ή $x = b$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $\sum_k |\hat{f}(k)e^{ikx}| = +\infty$ για κάθε x, δηλαδή ότι $\sum_k \left|\frac{\sin(kd)}{\pi k}\right| = +\infty$ για κάθε $d \in (0,\pi)$.

[1] char.out, 10/01/10 συμπλήρωση 30 Μαΐου 2020

Ισχυρισμός: Αν $0 < d < \pi$ τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kd|}{k} = +\infty.$$

(Το ίδιο ισχύει και αν $-\pi < d < 0$.)

Απόδειξη (Γ.Φ.) Επιλέγουμε $0 < s < \frac{1}{2}\min\{d, \pi - d\}$, οπότε $\sin s > 0$. Παρατηρούμε ότι αν $|\sin kd| < \sin s$ για κάποιο k τότε $|\sin(k+1)d| \geq \sin s$. Πράγματι: αν $|\sin kd| < \sin s$ τότε η γωνία kd βρίσκεται στο (ανοικτό) τόξο απ΄ το $-s$ στο s ή στο τόξο απ΄ το $\pi - s$ στο $\pi + s$. Η γωνία $(k+1)d$ δεν μπορεί να βρίσκεται στο ίδιο τόξο, γιατί τότε η διαφορά τους, d, θα ήταν μικρότερη από $2s$. Επίσης δεν μπορεί η μια γωνία να βρίσκεται στο ένα τόξο και η άλλη στο άλλο γιατί τότε η διαφορά τους θα ήταν μεγαλύτερη από $\pi - s - s$, ενώ $s < \frac{1}{2}(\pi - d)$. Επομένως, $|\sin(k+1)d| \geq \sin s$.

Έπεται ότι οι μισοί τουλάχιστον όροι της ακολουθίας $(\sin kd)_k$ ικανοποιούν $|\sin kd| \geq \sin s$. Συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kd|}{k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin s}{k} = +\infty.$$