Είναι κάθε τριγωνομετρική σειρά, σειρά Fourier;

Η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ik} e_k$ συγκλίνει για κάθε $t \neq 2k\pi$ (κριτήριο Dirichlet) αλλά δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Riemann-ολοκληρώσιμης συνάρτησης γιατί θα έπρεπε τα μερικά της αθροίσματα να είναι ομοιόμορφα φραγμένα (όπως έχουμε δείξει). Όμως, εφόσον $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{ik}\right|^2 < \infty$, είναι σειρά Fourier μιας $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$.

Υπάρχουν άραγε συγκλίνουσες τριγωνομετρικές σειρές που δεν είναι σειρές Fourier καμμιάς Lebesgue-ολοκληρώσιμης συνάρτησης;

Θα δείξουμε ότι η συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k}$$

(σειρά ημιτόνων) δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Lebesgue-ολοκληρώσιμης συνάρτησης, ενώ η αντίστοιχη σειρά συνημιτόνων

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k}$$

είναι!

Παρατήρησε ότι οι δύο αυτές σειρές μπορούν να γραφτούν

$$2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt} \quad \text{και} \quad 2i\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{ikt}$$

αν θέσουμε

$$b_k = \begin{cases} \frac{-1}{\log|k|}, & k \leq -2 \\ 0, & -1 \leq k \leq 1 \\ \frac{1}{\log k}, & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{\log|k|}, & k \leq -2 \\ 0, & -1 \leq k \leq 1 \\ \frac{1}{\log k}, & k \geq 2 \end{cases}$$

Πρόταση 1 *Αν* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε* $-\hat{f}(-n) = \hat{f}(n) \geq 0$ *τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{f}(n) < \infty.$$

Κατά συνέπεια η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k}$ δεν είναι σειρά Fourier: γιατί, αν υπήρχε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ με συντελεστές Fourier τους b_k, θα έπρεπε να έχουμε $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{\log n} < \infty$, πράγμα που δεν συμβαίνει!

Πρόταση 2 *Έστω* $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ *και* $a_n \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *τότε υπάρχει* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ *με*

$$\hat{f}(k) = a_{|k|} \quad \textit{για κάθε} \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία $a_0 = a_1 = 0$, $a_n = \frac{1}{\log n}$, $n \geq 2$ (η ανισότητα ισχύει γιατί η $\phi(x) = \frac{1}{\log x}$ είναι κυρτή συνάρτηση). Επομένως, η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k}$ είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης που ανήκει [1] στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Απόδειξη της Πρότασης 1 Αφαιρώντας τη σταθερά $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\lambda(t)$ από την f, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\hat{f}(0) = 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)d\lambda(t), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

τότε η g είναι συνεχής, $g(-\pi) = g(\pi)$ και $ik\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ (δες Λήμμα 3).

Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα του Fejér, η ακολουθία $(\sigma_n(g)(0))_n$ όπου

$$\sigma_n(g)(0) = \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{g}(k)$$

συγκλίνει (στο $g(0)$), άρα συγκλίνει και η ακολουθία $(\sigma_n(g)(0) - \hat{g}(0))$. Όμως

$$\sigma_n(g)(0) - \hat{g}(0) = \sum_{0<|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{g}(k) = \sum_{0<|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\hat{f}(k)}{ik}.$$

Επειδή $\hat{f}(-k) = -\hat{f}(k)$, το τελευταίο άθροισμα ισούται με

$$2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{\hat{f}(k)}{ik} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{f}(k)}{ik} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\frac{\hat{f}(k)}{i}.$$

[1] αλλά όχι στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, αφού οι συντελεστές Fourier δεν είναι τετραγωνικά αθροίσιμοι!

Όμως η ακολουθία $(\hat{f}(n))$ είναι μηδενική (Θεώρημα Riemann–Lebesgue), άρα και οι μέσοι όροι της $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\hat{f}(k)\right)_n$ αποτελούν μηδενική ακολουθία. Έπεται από την ισότητα

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{\hat{f}(k)}{ik} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\frac{\hat{f}(k)}{i} - (\sigma_n(g)(0) - \hat{g}(0))$$

ότι και η $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\hat{f}(k)}{ik}\right)_n$ θα συγκλίνει. □

Χρησιμοποιήσαμε το

Λήμμα 3 *Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ και $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\lambda(t) = 0$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα g της f,*

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)d\lambda(t), \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

ικανοποιεί $ik\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και $g(-\pi) = g(\pi)$ και είναι συνεχής (ανήκει στον $C(\mathbb{T})$).

Απόδειξη Η συνάρτηση g ικανοποιεί $g(-\pi) = g(\pi)$, αφού υποθέσαμε ότι $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\lambda(t) = 0$. Αν η f ήταν συνεχής συνάρτηση, η g θα ήταν συνεχώς παραγωγίσιμη, οπότε θα είχαμε την ισότητα $ik\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ με ολοκλήρωση κατά μέρη, όπως ξέρουμε.

Στη γενική περίπτωση όπου $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ προσεγγίζουμε την g με "καλές" συναρτήσεις:

Αφού $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, υπάρχουν τριγωνομετρικά πολυώνυμα p_n με $\|f - p_n\|_1 \to 0$. Παρατήρησε ότι, αφού $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\lambda(t) = 0$, έχουμε

$$|\hat{p}_n(0)| = |\hat{p}_n(0) - \hat{f}(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(p_n(t) - f(t))e^{ikt}d\lambda(t)\right| \leq \|f - p_n\|_1 \to 0.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα p_n με τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα q_n όπου $q_n(t) = p_n(t) - \hat{p}_n(0)$, εξασφαλίζουμε ότι $\hat{q}_n(0) = 0$ και $\|f - q_n\|_1 \to 0$. Ονομάζοντας g_n το αόριστο ολοκλήρωμα της q_n έχουμε συνεχείς συναρτήσεις στο

$[-\pi, \pi]$ ώστε για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{x} (q_n(t) - f(t)) d\lambda(t) \right| \leq \int_{-\pi}^{x} |q_n(t) - f(t)| d\lambda(t) \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t) - f(t)| d\lambda(t) = \|f - q_n\|_1 \end{aligned}$$

άρα $\|g_n - g\|_\infty \leq \|f - q_n\|_1 \to 0,$ δηλαδή $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[-\pi, \pi]$.

Επομένως η g είναι ομοιόμορφο όριο συνεχών, άρα συνεχής συνάρτηση.[2]

Τώρα, κάθε g_n είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $g_n(-\pi) = g_n(\pi)$ (αφού $\hat{q}_n(0) = 0$) και $g_n' = q_n$, οπότε η ισότητα $ik\hat{g}_n(k) = \hat{q}_n(k)$ αληθεύει, όπως ξέρουμε. Επίσης, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} & |\hat{q}_n(k) - \hat{f}(k)| \leq \|f - q_n\|_1 \to 0 \\ \text{και} \quad & |\hat{g}_n(k) - \hat{g}(k)| \leq \|g_n - g\|_\infty \to 0. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$ik\hat{g}(k) = \lim_n ik\hat{g}_n(k) = \lim_n \hat{q}_n(k) = \hat{f}(k). \qquad \square$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 2, θα χρειασθεί ένα στοιχειώδες Λήμμα:

Λήμμα 4 *Αν (a_n) είναι μια μηδενική ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0.$$

Απόδειξη Η σχέση $2a_n \leq (a_{n-1} + a_{n+1})$ μπορεί να γραφτεί

$$(a_n - a_{n+1}) \leq (a_{n-1} - a_n)\,,$$

οπότε η ακολουθία $b_n := a_n - a_{n+1}$ είναι φθίνουσα. Αφού είναι και μηδενική ($|b_n| \leq |a_n| + |a_{n+1}| \to 0$) έχουμε $b_n \geq 0$ για κάθε n.

[2] Αυτό ήταν ήδη γνωστό: έχουμε δείξει γενικότερα ότι το αόριστο ολοκληρωμα κάθε συνάρτησης του $\mathcal{L}^1$ είναι συνεχής. Αλλά η μέθοδος απόδειξης της Πρότασης μας δίνει τη συνέχεια της g δωρεάν...

Ισχυρίζομαι ότι $nb_n \to 0$: Πράγματι, έχουμε

$$0 \le nb_{2n} \le b_n + \cdots + b_{2n} = a_n - a_{2n+1} \to 0\,,$$

άρα $(2n)b_{2n} \to 0$. Επίσης

$$0 \le (2n+1)b_{2n+1} \le 3nb_{2n+1} \le 3nb_{2n} \to 0\,.$$

Αφού οι ακολουθίες των άρτιων και περιττών όρων της (nb_n) τείνουν στο 0, ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Τότε όμως

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) &= \sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} - a_n + a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=1}^{N} n(b_{n-1} - b_n)\\ &= \sum_{n=1}^{N}((n-1)b_{n-1} - nb_n) + \sum_{n=1}^{N} b_{n-1}\\ &= 0b_0 - Nb_N + \sum_{n=1}^{N} b_{n-1} = -N(a_N - a_{N+1}) + a_0 - a_N.\end{aligned}$$

Επειδή $a_N \to 0$ και $N(a_N - a_{N+1}) = Nb_N \to 0$ καθώς $N \to \infty$, έπεται τώρα ότι $\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \to a_0$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 2. Ορίζουμε την ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων (f_N) από τον τύπο

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)K_{n-1} = \sum_{n=1}^{N} c_n K_{n-1}$$

όπου (K_n) είναι ο πυρήνας Fejér (κάθε K_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο). Επειδή
$\|K_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$ και $c_n = n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \ge 0$, για κάθε $M > N$ έχουμε

$$\|f_M - f_N\|_1 \le \sum_{n=N+1}^{M} c_n \|K_{n-1}\|_1 = \sum_{n=N+1}^{M} c_n = \sum_{n=1}^{M} c_n - \sum_{n=1}^{N} c_n$$

πράγμα που σημαίνει, επειδή η (c_n) είναι αθροίσιμη (από το Λήμμα), ότι η (f_N) είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_1$. Από την *πληρότητα του* $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ (!) έπεται τώρα ότι υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - f_N\|_1 \to 0$.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί τώρα να δείξουμε ότι

Ισχυρισμός $\hat{f}(k) = a_{|k|}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη, Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$|\hat{f}(k) - \hat{f}_N(k)| \leq \|f - f_N\|_1 \to 0$$

δηλαδή

$$\hat{f}(k) = \lim_N \hat{f}_N(k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{K}_{n-1}(k).$$

Ας θυμηθούμε όμως ότι $K_{n-1} = \sum_{|j|\leq n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) e_j$, οπότε

$$\hat{K}_{n-1}(k) = \sum_{|j|\leq n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \hat{e}_j(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{n}, & |k| \leq n-1 \\ 0, & |k| > n-1 \end{cases}$$

αφού $\hat{e}_j(k) = \delta_{j,k}$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=|k|+1}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) = \sum_{n=|k|+1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=|k|+1}^{\infty} (n - |k|)(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = \sum_{m=1}^{\infty} m(d_{m-1} + d_{m+1} - 2d_m)$$

όπου $d_m = a_{m+|k|}$. Η ακολουθία (d_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος, άρα $\sum_{m=1}^{\infty} m(d_{m-1} + d_{m+1} - 2d_m) = d_0 = a_{|k|}$. Άρα τελικά $\hat{f}(k) = a_{|k|}$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □