3/4/2020

Άσκ II.1

<u>Υποθ</u> f άρτια, $a_k(f) \ge 0$ νδο $\sum a_n(f) < +\infty$

<u>Απόδ</u> Αφού άρτια, $b_n(f) = 0$ $\forall n$ άρα

$$S_n(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kt$$

$$\Downarrow$$

$$S_n(f,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)$$ αύξουσα ακολουθία!

<u>Τότε</u>

$$\sigma_{2n}(f,0) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} S_k(f,0)$$

$$\ge \frac{1}{2n+1}\sum_{k=n+1}^{2n} S_k(f,0)$$

$$\ge \frac{1}{2n+1}\, n\, S_{n+1}$$ διότι $S_k \ge S_n$ όταν $k \ge n$

$\forall n$: $$S_n(f,0) \le \frac{2n+1}{n}\sigma_{2n}(f,0) \le 3\sigma_{2n}(f,0)$$

όμως ξέρω ότι $|\sigma_{2n}(f,t)| \le \|f\|_\infty$ άρα

$$S_n(f,0) \le 3\|f\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(f) \le 3\|f\|_\infty \quad \forall n \quad \boxtimes$$

f συνεχ. $|k\hat{f}(k)| \leq M \quad \forall k$

$$\Downarrow$$

$$\sup_n \|S_n(f)\|_\infty < \infty$$

<u>Απόδ</u> Ξέρουμε $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \forall n$

όπου $\sigma_n(f) = \sum_{|k|\leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e_k$ (??)

$$S_n(f) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k) e_k$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_n(f) - S_n(f) = -\sum \frac{|k|}{n+1} \hat{f}(k) e_k$$

$$\Rightarrow \|\sigma_n(f) - S_n(f)\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{|k|\leq n} |k\hat{f}(k)| \underbrace{\|e_k\|}_{=1}$$

<u>άρα</u> αν $|k\hat{f}(k)| \leq M$ για $k \in \mathbb{Z}$

$$|\sigma_n(f) - S_n(f)| \leq \frac{M}{n+1}(2n+1)$$

$$\Rightarrow \|S_n(f)\| \leq \|\sigma_n(f)\|_\infty + 2M \leq \|f\|_\infty + 2M < \infty$$

$\blacksquare$

<u>Επίσης</u> αν ξέρω ότι $\frac{1}{n+1} \sum |k\hat{f}(k)| \longrightarrow 0$

(Ασκ II.3) τότε $\|\sigma_n(f) - S_n(f)\|_\infty \longrightarrow 0$

οπότε, αν f συνεχής, έχουμε $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \longrightarrow 0$

έχω ότι $S_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα