Καλώς ήρθατε στην Ανάλυση Fourier και το Ολοκλήρωμα Lebesgue

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH121/

Εαρινό εξάμηνο 2019-2020

Περιεχόμενα

J. Fourier (1768-1830) H. Lebesgue (1875-1941)

Jean-Baptiste Joseph Fourier

Henri Lebesgue

Reminder (Κολουντζάκης- Παπαχριστόδουλος 2.1, 2.2)

(a) Complex Numbers.

(b) Periodic functions.
If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is 2π-periodic, it is determined by its restriction to any interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ of length 2π. Thus it is enough to study the restriction $g := f|_{[-\pi,\pi]} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Note: $g(-\pi) = g(\pi)$.

(Κολουντζάκης- Παπαχριστόδουλος 2.1, 2.2: όλες οι ασκήσεις)

Σειρές Fourier

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη (κατά Riemann, προς το παρόν).
Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου οι συντελεστές Fourier a_k και b_k της f ορίζονται από τις σχέσεις

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

και

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(τα ολοκληρώματα υπάρχουν).

Σειρές Fourier

Παρατήρηση Για κάθε $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \quad \text{και} \quad |b_k| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx.$$

Δηλαδή, οι ακολουθίες $\{a_k\}$ και $\{b_k\}$ είναι φραγμένες.

Το n-οστό μερικό άθροισμα της $S[f]$ είναι η συνεχής συνάρτηση

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Πρόβλημα: «συγκλίνει» η ακολουθία $s_n(f)$; «Συγκλίνει» στην f;

ΟΧΙ, «συνήθως»

ΝΑΙ, για «καλές συναρτήσεις»

ΝΑΙ, «με την κατάλληλη έννοια σύγκλισης».

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Τριγωνομετρική Σειρά:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}\,.$$

Τριγωνομετρικό πολυώνυμο:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

$a_k = b_k = 0$ όταν $k > N$. Βαθμός: ο μεγαλύτερος N ώστε $|a_N| + |b_N| \neq 0$.

$$\text{Ισοδύναμη μορφή} \quad \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx)$$

όπου $\quad \exp(it) = \cos t + i \sin t\,, \qquad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 1 \\ \frac{1}{2}a_0, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k \leq -1 \end{cases}$

Παράδειγμα 1.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$
$$= \begin{cases} \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & \frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \frac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$c_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$
$$= \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2m\pi \\ n + \frac{1}{2}, & x = 2m\pi \end{cases}$$

Παράδειγμα 1. (συνέχεια)

Μολονότι οι δυο ακολουθίες δεν συγκλίνουν (γιατί;), είναι φραγμένες (όταν $x \neq 2k\pi$).

Απόδειξη Αν $x \in (0, 2\pi)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad \text{και} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Επιπλέον για κάθε $\delta > 0$ οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$:
για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \quad \text{και} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Παράδειγμα 2

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx = \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n^2} \sin nx$$

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \cos kx = \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2} \cos nx$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα σε συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διότι

Θεώρημα

Αν μια ακολουθία (g_n) συναρτήσεων $g_n : X \to \mathbb{C}$ (όπου $X \subseteq \mathbb{R}$) είναι ομοιόμορφα βασική,[1] *τότε συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.*
Αν επί πλέον οι g_n είναι συνεχείς στο X, τότε και το όριό τους είναι συνεχής συνάρτηση.

Πρόταση (Weierstrass M-test)

Αν οι $f_n : X \to \mathbb{C}$ ικανοποιούν $|f_n(t)| \leq M_n \ \forall t \in X, n \in \mathbb{N}$ όπου $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ τότε η (g_n) με $g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

[1] δηλαδή ικανοποιεί: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq n_o$ να ισχύει *για κάθε* $x \in X$ η ανισότητα $|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$

Παράδειγμα 3

Παράδειγμα

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx$$
$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos kx = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n} \cos nx$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν για κάθε $x \neq 2k\pi$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις. Αρκεί να περιορισθούμε στο $(0, 2\pi)$, εφόσον οι δύο ακολουθίες είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, άρα 2π-περιοδικές συναρτήσεις. (Παρατήρησε ότι για $x = 2k\pi$ η $(c_n(x))$ αποκλίνει.)

Εργαλεία

Πρόταση (Dirichlet)

Έστω (a_k) *ακολουθία συναρτήσεων* $a_k : X \to \mathbb{C}$ *και* (b_k) *ακολουθία αριθμών. Αν*

$$(i) \text{ υπάρχει } M < \infty \text{ ώστε } \forall t \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\right| \le M,$$

$$(ii)\ b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge 0$$

και (iii) $b_n \to 0$,

τότε η σειρά $\sum_k b_k a_k$ *συγκλίνει* ομοιόμορφα *στο* X.

Λήμμα (άθροιση κατά μέρη)

Αν $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge 0$ *και* $a_k \in \mathbb{C}$, *τότε θέτοντας* $s_0 = 0$ *και* $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, *έχουμε για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$ *με* $n > m \ge 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

Απόδ. Dirichlet Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n > m$, για κάθε $t \in X$ έχουμε από το Λήμμα

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(t) b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(t)(b_k - b_{k+1}) + s_n(t) b_n - s_{m-1}(t) b_m\right|$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k(t)|(b_k - b_{k+1}) + |s_n(t)| b_n + |s_{m-1}(t)| b_m$$

(γιατί $b_n, b_m, b_k - b_{k+1} \geq 0$)

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} M(b_k - b_{k+1}) + M b_n + M b_m$$

$$= M(b_m - b_n) + M b_n + M b_m = 2M b_m.$$

... αφού $b_m \to 0$, συμπεραίνουμε οτι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_k b_k a_k$ είναι ομοιόμορφα Cauchy, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα. $\square$

Εργαλεία

Πρόταση

Αν $V \subseteq \mathbb{R}$ *ανοικτό*[2] *και* $f_n : V \to \mathbb{C}$ *με την ιδιότητα: «για κάθε συμπαγές* $K \subseteq V$ *η* $(f_n|_K)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* K*» (λέμε: η* (f_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του* V*) τότε για κάθε* $x \in V$ *η* $(f_n(x))$ *συγκλίνει.*
Αν επί πλέον οι f_n *είναι συνεχείς στο* V*, τότε και το όριό τους* $f : x \to \lim_n f_n(x)$ *είναι συνεχής συνάρτηση στο* V*.*

[2] ή γενικότερα, V: μετρικός χώρος

Συνοψίζουμε

$\left(\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right)$ Δεν συγκλίνει, όμως $\forall \delta > 0$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[\delta, 2\pi - \delta]$.

$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx\right)$ Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2\pi]$, άρα σε συνεχή συνάρτηση.

$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx\right)$ Συγκλίνει για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ σε συνεχή συνάρτηση, γιατί $\forall \delta > 0$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Σειρές Fourier

Αν γνωρίζω οτι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, πώς να βρω τους συντελεστές;

Παρατήρηση

$$\textit{Αν} \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx,$$

τότε

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned}$$

Παρατήρηση (Μιγαδική μορφή)

$$\text{αν} \quad f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp ikx$$

τότε,

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-imx)dx, \quad -N \leq m \leq N.$$

διότι αν $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx)dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Σειρές Fourier

Γενίκευση: αν δοθεί 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ορίζουμε

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_m = b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)dx, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

αρκεί τα ολοκληρώματα να υπάρχουν.

Ορισμός: η σειρά Fourier $S(f)$ της f:

$$S(f,x) := \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \quad \text{(μιγαδική μορφή)}$$

(Δεν εξετάζουμε προς το παρόν αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν ή όχι)

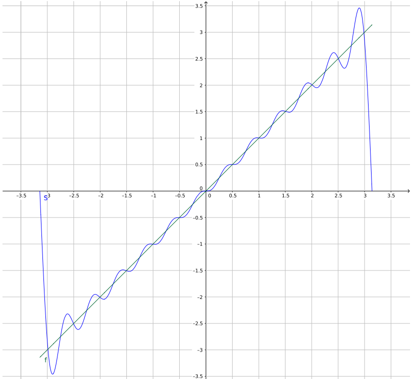
Παράδειγμα

Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = t, \; t \in (-\pi, \pi)$ είναι

$$f \sim 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \ldots\right)$$

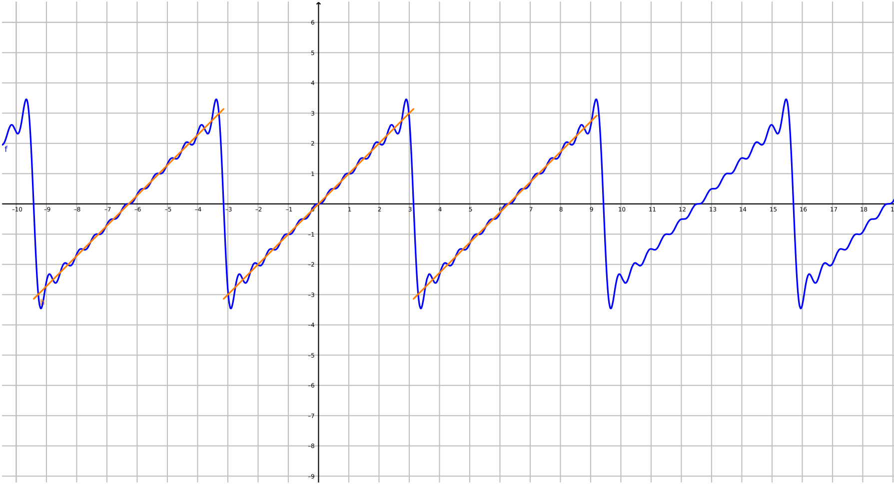
Αποδεικνύεται (Άσκηση!) ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής σχηματίζουν βασική ακολουθία και επομένως η σειρά συγκλίνει.

Συγκλίνει όμως άραγε στην f;



Παρένθεση: Περιοδική επέκταση

$$2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \ldots - \frac{1}{12}\sin 12t\right)$$



Σειρές Fourier

Παρατήρηση

• *Η σειρά Fourier ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου* p *είναι το ίδιο το τριγ. πολυώνυμο:* $S_n(p) = p$ *όταν* $n \geq \deg p$*, άρα* $S(p) = p$.

• *Αν μια τριγωνομετρική σειρά* $s(x) = \sum_k c_k e^{ikx}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε οι συντελεστές Fourier* $\widehat{s}(k)$ *της* s *είναι οι* c_k*, δηλαδή η σειρά Fourier της* s *είναι η ίδια η* s.

• *Δεν είναι όμως αλήθεια εν γένει ότι κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης (βλ. π.χ. [Απ 30.21]).*

Πρόταση (Γραμμικότητα!)

Αν οι f, g *είναι ολοκληρώσιμες στο* $[0, 2\pi]$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} a_n(f+\lambda g) &= a_n(f) + \lambda a_n(g), \\ b_n(f+\lambda g) &= b_n(f) + \lambda b_n(g) \quad (n, m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

ισοδύναμα $\quad (\widehat{f+\lambda g})(k) = \hat{f}(k) + \lambda \hat{g}(k) \quad (k \in \mathbb{Z})$

επομένως $\quad S_n(f+\lambda g) = S_n(f) + \lambda S_n(g) \quad (n \in \mathbb{N}).$

Απόλυτα συγκλίνουσες σειρές Fourier

Πρόταση

Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum |\hat{f}(k)| < \infty$ (ισοδύναμα $\sum(|a_k(f) + |b_k(f)| < \infty$) τότε η $(S_N(f))$ συγκλίνει ομοιόμορφα (και άρα η $S(f) := \lim\limits_N S_N(f)$ είναι συνεχής).

Αποδ. Weierstrass M-test.

Πώς να συμπεράνω όμως ότι η $(S_N(f))$ συγκλίνει στην f?

Παρατηρώ ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\widehat{S_N(f)}(k) = \hat{f}(k)$ όταν $N \geq |k|$, άρα $\widehat{S(f)}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (γιατί;).

Αρκεί λοιπόν να δείξω το επόμενο Θεώρημα Μοναδικότητας:

Θεώρημα Μοναδικότητας

Θεώρημα

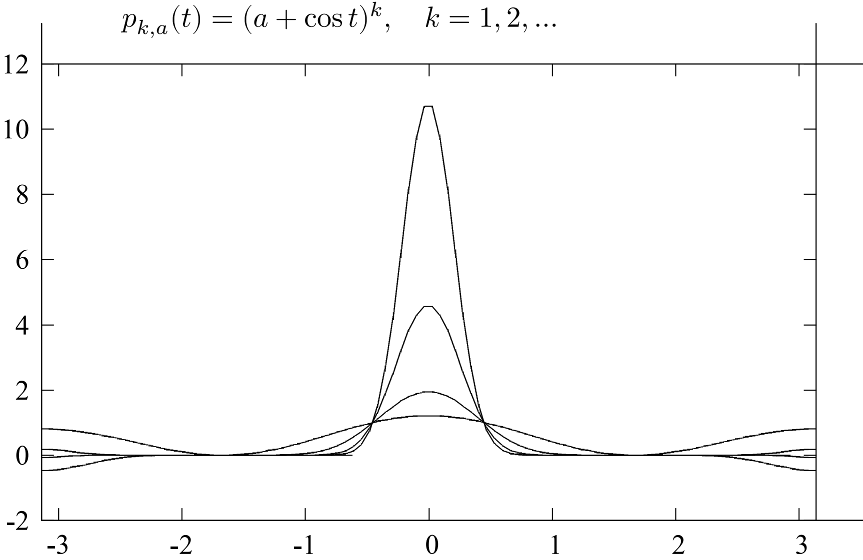
Αν f και g είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f = g$.

Σχέδιο Απόδειξης Θα δείξω ότι αν $f \neq g$, υπάρχει τριγ. πολυώνυμο p με $\int_{-\pi}^{\pi} fp \neq \int_{-\pi}^{\pi} gp$. Τότε, υπάρχει k ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} fe_k \neq \int_{-\pi}^{\pi} ge_k$, δηλ. $\hat{f}(-k) \neq \hat{g}(-k)$.

Θέτω $\psi := f - g$. Στην ειδική περίπτωση $\psi(0) > 0$, θα βρώ τριγωνομετρικό πολυώνυμο της μορφής $p_{k,a}(t) = (a + \cos t)^k$ για κατάλληλα a, k ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} \psi p \neq 0$.

Η γενική περίπτωση ανάγεται σ' αυτήν: αν $\psi(t_0) \neq 0$, υπάρχει θ ώστε $e^{i\theta}\psi(t_0) > 0$, οπότε η ϕ με $\phi(s) = e^{i\theta}\psi(s + t_0)$ έχει $\phi(0) > 0$, συνεπώς κάποιο $\hat{\phi}(k)$ θα είναι μη μηδενικό. Επομένως $\hat{\psi}(k) = e^{-i\theta}e^{ikt_0}\hat{\phi}(k) \neq 0$.

Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα $p_{k,a}$



Τα τριγ. πολυώνυμα $p_{k,a}$ με $a = \frac{1}{10}, \ k = 2, 7, 16, 25.$

Θεώρημα Μοναδικότητας

Η συνέχεια χρησιμοποιήθηκε μόνο στο σημείο t_0.

Θεώρημα

Αν f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $\mathbb{T}$ με $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f(t_0) = g(t_0)$ σε κάθε t_0 όπου η $f - g$ είναι συνεχής.

Απλές περιπτώσεις σύγκλισης

Πρόταση

Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum |\widehat{f}(k)| < \infty$ (ισοδύναμα $\sum(|a_k(f) + |b_k(f)| < \infty$) τότε η $(S_N(f))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Πρόταση

Αν f συνεχής, 2π-περιοδική με ολοκληρώσιμη παράγωγο f',

$$S(f', x) = \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos kx - ka_k \sin kx).$$

Μιγαδική μορφή:

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k) \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Απλές περιπτώσεις σύγκλισης

Πρόταση

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής* 2π*-περιοδική συνάρτηση και* $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$ *τότε η* f *είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η σειρά* $\sum ik\hat{f}(k) \exp ikx$ *συγκλίνει στην* f' *ομοιόμορφα.*

Λήμμα

Αν η f *και οι παράγωγοί της* $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ *είναι συνεχείς* 2π*-περιοδικές συναρτήσεις και η* $|f^{(n)}|$ *είναι ολοκληρώσιμη τότε* $|\hat{f}(k)| \leq \dfrac{\|f^{(n)}\|_1}{|k|^n}$ *για κάθε* $k \neq 0$ *(όπου* $\|g\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int |g|$*).*

Πρόταση

Αν οι f, f' *και* f'' *είναι συνεχείς και* 2π*-περιοδικές, η σειρά* $\sum \hat{f}(k) \exp ikx$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f*.*

Το Θεώρημα του Fejér

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και 2π-περιοδική.
Υπενθύμιση: $S_n(f,t) = \displaystyle\sum_{|k|\leq n} \widehat{f}(k) e^{ikt}$.

Η $(S_n(f))$ δεν είναι πάντα συγκλίνουσα (ούτε καν κατά σημείο). Όμως,

Θεώρημα (Fejér)

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η ακολουθία $(\sigma_n(f))$ όπου

$$\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} S_n(f) \quad (m \in \mathbb{N})$$

συγκλίνει στην f ομοιόμορφα.

Αθροισιμότητα

$$
\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)\exp(ikt) \\
&= \sum_{k=-n}^{k=n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\exp(-iks)\frac{ds}{2\pi} \right) \exp(ikt) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s)\frac{ds}{2\pi} := \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s) f(s)\frac{ds}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

άρα

$$
\begin{aligned}
\sigma_m(f)(t) &= \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} S_n(f)(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s)ds \\
&:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(t-s) f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Δύο πυρήνες: Dirichlet εναντίον Fejér

Dirichlet: $$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ikx) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}, & x \neq 0, \\ 2n+1, & x = 0 \end{cases} \qquad (d)$$

Fejér: $$K_m(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{k=-n}^{n}\exp(ikx)\right) = \begin{cases} \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}\right)^2, & x \neq 0, \\ m+1, & x = 0 \end{cases} \qquad (k)$$

Απόδειξη της (d) για $x \neq 0$

$$\sin(\frac{x}{2})D_n(x) = \sin(\frac{x}{2}) \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ikx)$$

$$\Rightarrow \quad (e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}})D_n(x) = (e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}) \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ikx)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (e^{ix} - 1)D_n(x) &= (e^{ix} - 1) \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ikx) \\ &= \sum_{k=-n}^{k=n} (\exp(i(k+1)x) - \exp(ikx)) \\ &= \exp(i(n+1)x) - \exp(-inx) \\ &= e^{\frac{ix}{2}}(\exp(i(n+\frac{1}{2})x) - \exp(-i(n-\frac{1}{2}x)) \\ &= e^{\frac{ix}{2}} 2i \sin((n+\frac{1}{2})x)\,. \end{aligned}$$

Απόδειξη της (k)

Αν $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{m}\sin(n+\frac{1}{2})x =& \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{m}2\sin\frac{x}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x \\
=& \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{m}(\cos nx-\cos(n+1)x) \\
=& \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}(1-\cos(m+1)x)
\end{aligned}$$

Επομένως $K_m(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} D_n(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$,

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\frac{1-\cos(m+1)x}{2} = \frac{1}{m+1}\cdot\frac{\sin^2(\frac{m+1}{2}x)}{\sin^2\frac{x}{2}}\,.$$

Αν $x = 0$,

$$K_m(0) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=-n}^{k=n}\exp 0 = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}(2n+1) = m+1\,. \qquad \square$$

Λήμμα

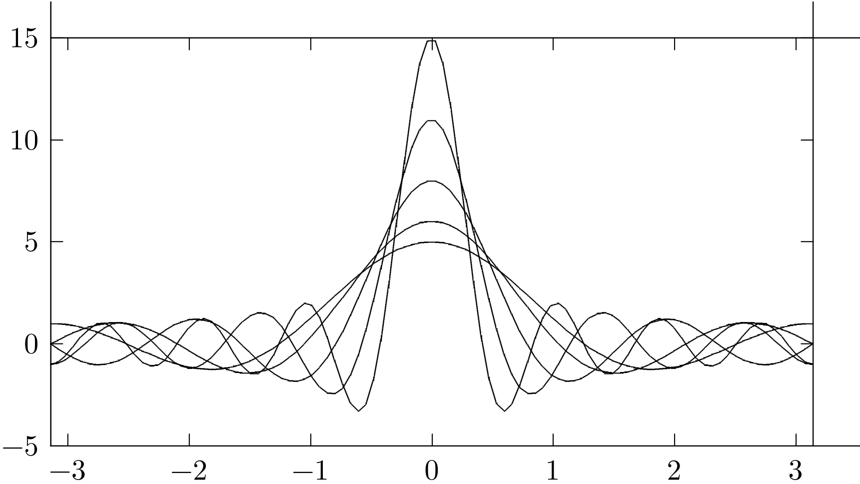
Ισχυρισμός: $K_m = \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right) e_k\,.$ Απόδειξη:

$$K_m = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=-n}^{n} e_k \right) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} (e_0 + (e_1 + e_{-1}) + \cdots + (e_n + e_{-n}))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m+1}(e_0 && (n=0)\\
&+ e_0 + (e_1 + e_{-1}) && (n=1)\\
&+ e_0 + (e_1 + e_{-1}) + (e_2 + e_{-2}) && (n=2)\\
&+ \dots \dots &&\\
&+ e_0 + (e_1 + e_{-1}) + (e_2 + e_{-2}) + \cdots + (e_m + e_{-m})) && (n=m)\\
&= e_0 + \frac{m}{m+1}(e_1 + e_{-1}) + \frac{m-1}{m+1}(e_2 + e_{-2}) + \cdots + \frac{1}{m+1}(e_n + e_{-n}) &&\\
&= \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right) e_k\,. &&
\end{aligned}$$

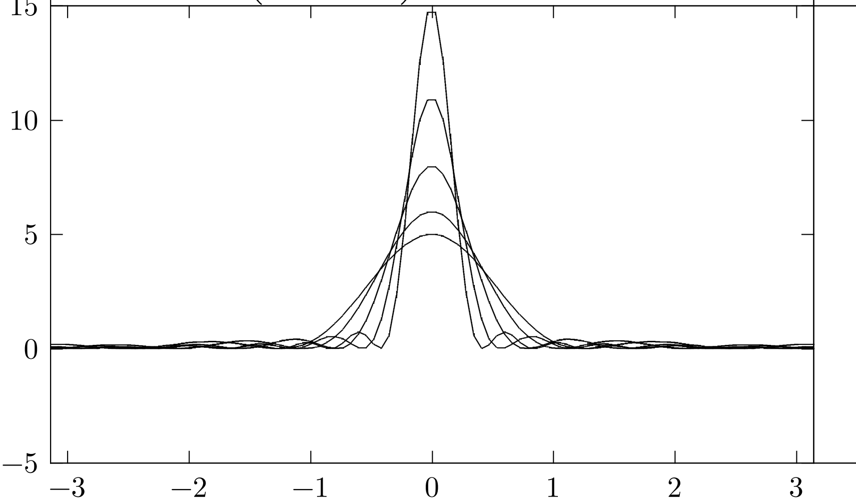
Ο πυρήνας του Dirichlet

$$D_m(x) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)},\ x \neq 0, \quad D_m(0) = 2m+1.$$



$m = 4, 5, 7, 10, 14.$

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin(\frac{m+1}{2}x)}{\sin(x/2)}\right)^2, \ x \neq 0, \quad K_m(0) = m+1.$$



$m = 4, 5, 7, 10, 14.$

Ιδιότητες του πυρήνα του Fejér K_m

Παρατήρηση

Ο πυρήνας του Fejér έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) *υπάρχει M ώστε $\|K_m\|_1 \leq M$ για κάθε m.*

(β) *Αν $\delta \in (0, \pi)$ και $E_\delta = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, τότε $\lim_m \int_{E_\delta} |K_m| = 0$.*

(γ) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(x) dx = 1$ *για κάθε m.*

• Το (γ) ισχύει απ' τον ορισμό του K_m, αφού $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 1$ αν $k = 0$ και 0 αλλιώς.

• Αφού $K_m(t) \geq 0$, από το (γ) έπεται και το (α) με $M = 1$.

• Το (β) έπεται από την παρατήρηση ότι αν $\delta \leq |x| \leq \pi$, τότε $|K_m(x)| = K_m(x) \leq \frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$, οπότε $\lim_m K_m(x) = 0$ ομοιόμορφα στο E_δ και άρα $\lim_m \int_{E_\delta} |K_m| = 0$.

Σχέδιο απόδειξης Θεωρήματος Fejér

Αν $\delta > 0$, για αρκετά μεγάλο $m \in \mathbb{N}$ το $K_m(s)$ είναι σχεδόν 0 έξω απ' το διάστημα $[-\delta, \delta]$ (από το (β)). Συνεπώς

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds$$

όπου το σύμβολο $\approx$ εδώ σημαίνει «περίπου ίσο». Αλλά η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα αν το δ είναι αρκετά μικρό, όταν $|s| < \delta$ έχουμε $f(t-s) \approx f(t)$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds \approx f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds\right)$$

και, πάλι από το (β),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds = 1$$

από το (γ). Συνεπώς τελικά $\sigma_m(f)(t) \approx f(t)$.

Πρώτες συνέπειες Θεωρήματος Fejér

- Μοναδικότητα. Αν f, g συνεχείς, 2π-περιοδικές και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f = g$.

Δεύτερη απόδειξη. Έχουμε $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $f = \lim_n \sigma_n(f) = \lim_n \sigma_n(g) = g$ από Fejér.

- Πρόταση [Fejér] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{T}$ και 2π-περιοδική. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $t \in \mathbb{T}$, τότε $\sigma_n(f, t) \to f(t)$. [Η απόδειξη είναι παραλλαγή της προηγούμενης: τώρα το δ εξαρτάται απ' το t, και αποδεικνύουμε σύγκλιση στο t.]

[Παρατήρηση: Γενικότερα, αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(t_+)$ και $f(t_-)$, τότε $\sigma_n(f, t) \to \frac{f(t_+)+f(t_-)}{2}$. (Η απόδειξη παραλείπεται).]

- Πόρισμα Με τις υποθέσεις της Πρότασης, αν η $(S_n(f, t_0))$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει στο $f(t_0)$.

- Παρατήρηση Για κάθε f, Riemann ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{T}$ και 2π-περιοδική, ισχύει ότι $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Αν f, g είναι δύο (Riemann) ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{T}$ ορίζουμε

$$\|f-g\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

και $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|f-g\|_2 \le \|f-g\|_\infty := \sup\{|f(t)-g(t)| : t\in\mathbb{T}\}$$

και ότι $\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2}$.

Παρατήρηση $\quad \hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle\,,\ k\in\mathbb{Z}.$

Αν f, g, h είναι ολοκληρώσιμες στο $\mathbb{T}$ και $\lambda\in\mathbb{C}$,

(i) $\langle f+\lambda h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \lambda\langle h, g\rangle$

(ii) $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$

(iii) $\langle f, f\rangle \ge 0$

(iv) αν f συνεχής, $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0.$

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Πρόταση (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης)

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *Riemann ολοκληρώσιμη και* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο* p *βαθμού* $\deg(p) \leq n$ *ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-p|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_n(f)|^2$$

$$\text{δηλαδή } \|f-p\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2 \,.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.
Ειδικότερα αν $m \leq n$ *τότε* $\quad \|f-S_m(f)\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2$.

Απόδειξη:

$$\|f-p\|_2^2 \overset{Pyth}{=} \|f-S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)-p\|_2^2 \,. \tag{1}$$

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Αν f, g είναι δύο (Riemann) ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{T}$ ορίζουμε

$$\|f-g\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

και

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt \,.$$

Παρατηρούμε ότι η $\|\cdot\|_2$ ικανοποιεί

$$\|f-g\|_2 \leq \|f-g\|_\infty := \sup\{|f(t)-g(t)| : t \in \mathbb{T}\}$$

και ότι $\quad \|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} \,.$

Παρατήρηση $\quad \widehat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle \,, \; k \in \mathbb{Z}.$

Πόρισμα

Η απεικόνιση $(f,g)\to\langle f,g\rangle$ *είναι εσωτερικό γινόμενο και η* $(f,g)\to d_2(f,g):=\|f-g\|_2$ *είναι μετρική στον γραμμικό χώρο* $C(\mathbb{T})$ [3] *δηλαδή ικανοποιούν*

$$\begin{array}{rcl}
 & \langle f,g\rangle \in \mathbb{C} & d_2(f,g)\in\mathbb{R}_+ \\
(i) & \langle f+\lambda g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \lambda\,\langle g,H\rangle & (a)\ d_2(f,g)=d_2(g,f) \\
(ii) & \langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle} & (b)\ d_2(f,g)\le d_2(f,h)+d_2(h,g \\
(iii) & \langle f,f\rangle \ge 0 & (c)\ d_2(f,g)=0 \iff f=g. \\
(iv) & \langle f,f\rangle = 0 \iff f=0. &
\end{array}$$

[3] δεν είναι όμως μετρική στον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, γιατί η ισότητα $\|f-g\|_2=0$ δεν συνεπάγεται την $f(t)=g(t)$ για κάθε $t\in\mathbb{T}$. Μπορεί πχ. η $f-g$ να είναι $\neq 0$ σε ένα μόνο σημείο του διαστήματος. Θα δούμε αργότερα ότι το μόνο που μπορεί κανείς τότε να συμπεράνει είναι ότι η ισότητα $f=g$ ισχύει «σχεδόν παντού» - μιά έννοια που θα ορίσουμε τότε.

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Παρόλο που η $(S_n(f))$ μιάς συνεχούς f μπορεί να μην συγκλίνει, ούτε σημειακά,

Πρόταση

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική, τότε

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Απόδειξη Έχουμε $\|\sigma_n(f) - f\|_2 \leq \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$ από Fejér. Όμως, το $\sigma_n(f)$ είναι τριγ. πολυώνυμο βαθμού n, άρα από το Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης έχουμε $\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - \sigma_n(f)\|_2$ οπότε $\|f - S_n(f)\|_2 \to 0$.

Παρατήρηση Θα δούμε αργότερα ότι η Πρόταση ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Πόρισμα (Ανισότητα Bessel)

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *Riemann ολοκληρώσιμη και* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε*

$$\sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Επομένως

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Απόδειξη Από την (1), έχουμε $\|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 \geq 0$. Αλλά

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2. \qquad \square$$

Στην πραγματικότητα, η δεύτερη ανισότητα είναι ισότητα:

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Πόρισμα (Ισότητα Parseval)

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *συνεχής με* $f(-\pi) = f(\pi)$. *Τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 \,.$$

Απόδειξη Έχουμε $\|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2$ που τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$.

Παρατήρηση Θα δούμε αργότερα ότι το Πόρισμα ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Πόρισμα (Riemann – Lebesgue)

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε*

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0 \,.$$

Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Αν $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $0 \le r < 1$, η σειρά

$$A_r(f)(t) = f_r(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}, \qquad t \in \mathbb{T}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση function $f_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Ισχύει ότι

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(t-s) ds$$

$$\text{όπου} \quad P_r(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt$$

Ο πυρήνας του Poisson

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\,, \qquad 0 \le r < 1$$
$$\widehat{P_r}(k) = r^{|k|}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Πρόταση

(α) *Για κάθε* $r \in [0,1)$, *η συνάρτηση* $P_r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και μη αρνητική.*

(β) *Αν* $\delta \in (0, \pi/2)$ *και* $E_\delta := [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, *έχουμε*
$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{E_\delta} P_r(x)dx = 0.$$

(γ) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = 1$ *for every* $r \in [0,1)$.

Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Θεώρημα

Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $t \in \mathbb{T}$ και 2π-περιοδική, τότε σε κάθε σημείο συνέχειας t της f έχουμε $\lim_{r \nearrow 1} f_r(t) = f(t)$.
Αν η f είναι συνεχής, *τότε $\lim_{r \nearrow 1} f_r(x) = f(x)$* ομοιόμορφα, *δηλαδή*

$$\lim_{r \nearrow 1} \|f_r - f\|_\infty = 0.$$

Παρατήρηση

Ας παρατηρήσουμε ότι, ενώ οι συναρτήσεις f_r δεν είναι (εν γένει) τριγωνομετρικά πολυώνυμα, εντούτοις είναι συνεχείς (μάλιστα παραγωγίσιμες - γιατί;) συναρτήσεις ορισμένες από απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνουσες σειρές Fourier.

Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Μία **διαμέριση** $\mathcal{P}$ του $[a, b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι **φραγμένη**, θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \\ U(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Τα $L(f, \mathcal{P})$ και $U(f, \mathcal{P})$ ονομάζονται κάτω και άνω άθροισμα Riemann της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Πρόταση (Κριτήριο Riemann)

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη. Η* f *είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει διαμέριση* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *του* $[a,b]$ *ώστε*

$$U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{2}$$

Πρόταση

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη και* $c \in (a,b)$. *Υποθέτουμε ότι για κάθε* $\delta > 0$ *η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, c-\delta]$ *και στο* $[c+\delta, b]$.
Τότε η f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$

Σημειακή σύγκλιση και η αρχή της τοπικότητας

Αποδείξεις στις σημειώσεις του Απ. Γιαννόπουλου (2012) Παράγραφος 3.3.
Δείτε επίσης το "Fourier Analysis", των Stein & Shakarchi, Παρ. 3.2.1, 3.2.2.

Θεώρημα

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\theta_0 \in \mathbb{T}$, *τότε*

$$S_n(f)(\theta_0) \to f(\theta_0).$$

Θεώρημα (Αρχή τοπικότητας του Riemann)

Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο* $\theta_0 \in \mathbb{T}$ *και για κάποιο ανοικτό διάστημα* $I \subset \mathbb{T}$ *ώστε* $\theta_0 \in I$, *ισχύει*

$$f(\theta) = g(\theta) \qquad \text{για κάθε } \theta \in I.$$

Τότε,

$$S_n(f)(\theta_0) - S_n(g)(\theta_0) \to 0.$$

Ειδικότερα, η $\{S_n(f)(\theta_0)\}$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η* $\{S_n(g)(\theta_0)\}$ *συγκλίνει.*

Συμπληρώματα

Στόχος: Να δείξουμε ότι
Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ για την οποία

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n(f)(0)| = +\infty.$$

Επομένως η $S[f](0)$ αποκλίνει.

Λήμμα

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} i(\pi - x) & \textit{αν}\ 0 < x < \pi \\ -i(\pi + x) & \textit{αν}\ -\pi < x < 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$. *Τότε, η σειρά Fourier της* f *είναι*

$$S[f](x) = \sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Πρόταση

Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η* $\{|k\widehat{f}(k)|\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *είναι φραγμένη ακολουθία, τότε τα μερικά αθροίσματα* $S_n(f)$ *της σειράς Fourier της* f *είναι ομοιόμορφα φραγμένα:*

$$\sup_n \|S_n(f)\|_\infty < +\infty.$$

Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ *ώστε*

$$|S_n(f)(x)| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και για κάθε* $x \in \mathbb{T}$.

Συμπληρώματα

$$\text{Θέτω} \quad f_n(x) = \sum_{1\leq|k|\leq n} \frac{e^{ikx}}{k}, \qquad g_n(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Λήμμα

Υπάρχει $M > 0$ *ώστε* $|f_n(x)| \leq M$ *για κάθε* n *και για κάθε* x. $\square$

Λήμμα

Υπάρχει $c > 0$ *ώστε* $|g_n(0)| \geq c \log n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Πόρισμα

Δεν υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *ώστε*

$$S[g](x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Παράδειγμα: f συνεχής με $\limsup |S_n(f,0)| = \infty$

Αν

$$p_N(x) = e^{i2Nx} \sum_{1 \le |k| \le N} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

δείξαμε ότι υπάρχει M ώστε $|p_N(x)| \le M$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε, για μια υπακολουθία (N_k),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_{N_k}(x)$$

όπου $a_k = \frac{1}{k^2}$: συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα f συνεχής.
Αν όμως $N_k = 3^{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, τότε

$$|S_{2N_m}(f)(0)| \to +\infty$$

γιατί $|S_{2N_m}(f)(0)| \ge g_{N_m}(0)| \ge c a_m \log |N_m|$ για κατάλληλη $c > 0$.

Μέρος II

Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Ολοκλήρωμα Riemann

Συμπεριφορά ως προς όρια:

Παράδειγμα

Θεωρούμε την συνάρτηση του Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αν όμως $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ και

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0, & x \notin \{q_1, \dots, q_n\}, \end{cases}$$

τότε $f_n \nearrow f$ στο $[0,1]$ και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη, αφού είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

Ολοκλήρωμα Riemann και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

Riemann: διαμέριση του $[a,b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \text{ και } U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

όπου

$$m_k = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\} \text{ και } M_k = \sup\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}.$$

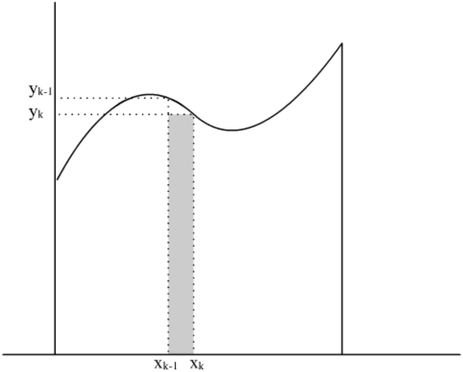
Lebesgue: διαμέριση του πεδίου τιμών $[m, M]$

$$Q = \{m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_t = M\}.$$

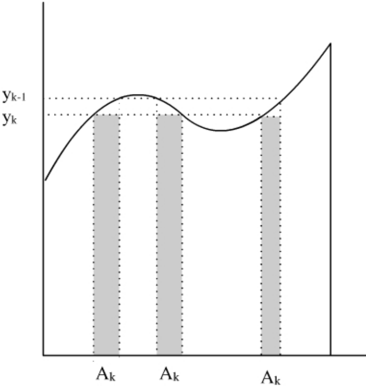
$$\widetilde{L}(f,Q) = \sum_{k=0}^{t-1} y_k \mu(f^{-1}([y_k, y_{k+1}])) \text{ και } \widetilde{U}(f,Q) = \sum_{k=1}^{t-1} y_{k+1} \mu(f^{-1}([y_k, y_{k+1}]))$$

μ = «μήκος» (??)

Ολοκλήρωμα Riemann και Ολοκλήρωμα Lebesgue



$y_k = f(x_k)$



$A_k = f^{-1}([y_k, y_{k-1}])$

Πρόβλημα: Πώς να ορίσουμε «μήκος» του (ενδεχομένως «πολύπλοκου») συνόλου $f^{-1}([y_k, y_{k+1})) = \{x \in [a,b] : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\})$.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη. Αν $\varepsilon > 0$, έστω P με $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Επιλέγω $t_k \in [x_k, x_{k+1}]$ και θέτω

$$f_\varepsilon = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\chi_k \quad \text{κλιμακωτή}$$

όπου $\chi_k = \chi_{(x_k, x_{k+1}]}$. Τότε $\int_a^b |f - f_\varepsilon| < \varepsilon$.

Για κάθε χ_k και κάθε $\delta > 0$ υπάρχει η_k συνεχής ώστε $\int_a^b |\chi_k - \eta_k| < \delta$.

Επομένως αν $\eta_\varepsilon := \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\eta_k$ τότε $\int_a^b |f_\varepsilon - \eta_\varepsilon| \leq n\delta \left\| f \right\|_\infty$

Συμπέρασμα: υπάρχει $\eta_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $\int_a^b |f - \eta_\varepsilon| < 2\varepsilon$.

Επιθυμητές ιδιότητες «μήκους»

(α) $\mu((a,b)) = b - a$

(β) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ όταν (E_n) ξένα ανά δύο

(γ) $\mu(E+x) = \mu(E)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση (α) Η απεικόνιση $\phi : t \mapsto e^{2\pi i t}$ ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ και του μοναδιαίου κύκλου $S := \{e^{2\pi i t} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}\}$ η οποία μετατρέπει το «μήκος» σε «μήκος τόξου».

(β) Αν υπάρχει $U \subseteq S$ ώστε τα σύνολα $U_q := \{e^{2\pi i q} w : w \in U\}$ (όπου $q \in \mathbb{Q}$) να είναι ξένα ανά δύο και η ένωση τους να είναι ο κύκλος S, τότε το U δεν μπορεί να έχει «μήκος τόξου», συνεπώς το $\phi^{-1}(U) \subseteq (0,1]$ δεν μπορεί να έχει «μήκος».

$\rightsquigarrow$

Υπάρχουν σύνολα που δεν «μετρώνται»

Στον κύκλο S ορίζω $\quad z \sim w \iff \exists\, q \in \mathbb{Q} : w = e^{2\pi i q} z.$

Η σχέση $\sim$ διαμερίζει το S σε (ξένες) κλάσεις: $S = \bigcup_{z \in S} [z]$ όπου $[z] = \{w \in S : w \sim z\}$.
Το Αξίωμα Επιλογής (!) εξασφαλίζει ότι μπορούμε να επιλέξουμε έναν αντιπρόσωπο $u \in [z]$ από κάθε κλάση. Έστω $U \subseteq S$ το σύνολο αυτών των επιλογών. Το $U \cap [z]$ είναι μονοσύνολο για κάθε κλάση $[z]$, οπότε

$$S = \bigcup_{u \in U} [u] \quad \text{(ένωση τροχιών).}$$

Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, γράφω $U_q := \{e^{2\pi i q} w : w \in U\}$.

Τότε έχω μια (διαφορετική) διαμέριση

$$S = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} U_q \quad \text{(αριθμ. ένωση μεταφορών του } U\text{).}$$

Αν το U είχε «μήκος», θα είχαμε $\mu(U_q) = \mu(U)\ \forall q$, άρα
$$\mu(S) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(U_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(U).$$

Όμως αν $\mu(U) = 0$, τότε $\mu(S) = 0$ κι αν $\mu(U) > 0$ τότε $\mu(S) = \infty$. (!)

Στρατηγική: Να περιορισθούμε στα «μετρήσιμα» σύνολα

Η στρατηγική αντιμετώπισης του προβλήματος είναι να ορίσουμε «μήκος» ή «μέτρο» μόνον για μια υποκλάση συνόλων, για τα οποία οι επιθυμητές απαιτήσεις ικανοποιούνται.

Η μέθοδος για να το πετύχουμε είναι η ακόλουθη: θα ορίσουμε αρχικά μια συνάρτηση (το λεγόμενο «εξωτερικό μέτρο») σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που θα ικανοποιεί *εν μέρει* τις επιθυμητές απαιτήσεις, και στη συνέχεια θα περιορισθούμε στην κλάση εκείνων των συνόλων στα οποία το εξωτερικό μέτρο ικανοποιεί *πλήρως* τις επιθυμητές απαιτήσεις. Θα δείξουμε ότι η κλάση αυτή (τα μετρήσιμα σύνολα) είναι επαρκώς μεγάλη.

Ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Έστω $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο ανοικτό διάστημα.

$$\text{μήκος: } \ell(I) := b - a.$$

Κάλυψη ενός $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζουμε μια ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων (I_n) με $A \subseteq \bigcup_n I_n$.

Ορισμός (εξωτερικό μέτρο Lebesgue)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το εξωτερικό μέτρο του A είναι το

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A \right\}.$$

Για τη συνέχεια: Αποδείξεις στις σημειώσεις του Απ. Γιαννόπουλου (2012) Παράγραφοι 4–6.

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Πρόταση

Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, *τότε* $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Πρόταση

Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ *είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε* $\lambda^*(A) = 0$.

Σημείωση Υπάρχουν και υπεραριθμήσιμα σύνολα με $\lambda^*(A) = 0$ (π.χ. Cantor - δες αργότερα).

Πρόταση

$\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$ *για κάθε* $A \subseteq \mathbb{R}$ *και* $x \in \mathbb{R}$.

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Πρόταση

$\lambda^*([a,b]) = b - a.$

Πρόταση

$\lambda^*((a,b)) = b - a \ (= \ell((a,b)).$

Πόρισμα

$\lambda^*((a,+\infty)) = +\infty.$

Η ιδιότητα

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E_n)$$

όταν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ξένα ανά δύο (σ-προσθετικότητα)*

δεν ισχύει για οποιαδήποτε $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπως είδαμε.

Όμως,

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue και μετρησιμότητα

Πρόταση (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα (subadditivity))

Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη οικογένεια $\{A_n\}$ *υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\lambda^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \lambda^*(A_n).$$

Θέλω να πετύχω ισότητα όταν $\{A_n\}$ ξένα ανά δύο.
Αναγκαστικά περιορίζω τα σύνολα που «έχουν μήκος»:

Ορισμός (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο)

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμο αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται $\mathcal{M}$.
Ο περιορισμός του λ^* στην $\mathcal{M}$ λέγεται μέτρο Lebesgue.

Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» – ως προς το εξωτερικό μέτρο – οποιοδήποτε άλλο σύνολο.

Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων

Παρατήρηση. Για να δείξω $A \in \mathcal{M}$, αρκεί

$$\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ (μάλιστα, αρκεί να υποθέσω $\lambda^*(X) < \infty$).

Πρόταση

Αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathcal{M}$.

Πρόταση

Το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A \in \mathcal{M}$ τότε $A^c = \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$.

Πρόταση

Η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{M}$.

Άρα και η τομή: $(A \cap B) = (A^c \cup B^c)^c$.

Απόδειξη

$X \cap (A \cup B) = X \cap (A \cup (A^c \cap B)) = (X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)$,

άρα

$$
\begin{aligned}
&\lambda^*(X \cap (A \cup B)) + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) = \\
&= \lambda^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)) + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) \\
&\overset{(sub)}{\leq} \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*((X \cap A^c) \cap B) + \lambda^*((X \cap A^c) \cap B^c) \\
&\overset{(B \in \mathcal{M})}{=} \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) \\
&\overset{(A \in \mathcal{M})}{=} \lambda^*(X).
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\lambda^*(X \cap (A \cup B)) + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) \leq \lambda^*(X).$$

Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων

Πρόταση

Αν $A, B \in \mathcal{M}$ *και* $A \cap B = \emptyset$ *τότε, για κάθε* $X \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(X \cap (A \cup B)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap B).$$

άρα

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Επαγωγή:

Πόρισμα (Πεπερασμένη προσθετικότητα)

Αν $B_1, \dots, B_m$ *είναι ξένα ανά δύο σύνολα στην* $\mathcal{M}$ *τότε, για κάθε* $X \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) = \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n)$$

άρα

$$\lambda^*(B_1 \cup \cdots \cup B_m) = \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(B_n).$$

Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων

Πρόταση

Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων συνόλων, τότε η ένωσή τους* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *είναι μετρήσιμο σύνολο.*

*** *** ***

Ορισμός (σ-άλγεβρα)

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν ικανοποιεί

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Έπεται ότι:

(iv) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(v) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ *Lebesgue μετρήσιμο* $\}$. *Η* $\mathcal{M}$ *είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση* $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$$

είναι αριθμήσιμα προσθετική (σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων (*$A_n \in \mathcal{M}$ *για κάθε* n *και* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *αν* $n \neq m$*), τότε*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Ορισμός (Μέτρο Lebesgue)

Η συνολοσυνάρτηση $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$$

ονομάζεται μέτρο Lebesgue.

Σύνολα Borel. Είναι Lebesgue μετρήσιμα

Πρόταση

Όλα τα διαστήματα είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Θεωρώ την τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν όλα τα διαστήματα:

Ορισμός (Borel σ-άλγεβρα)

Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα διαστήματα λέγεται σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή Borel σ-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$.

Πρόταση

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ *(θα δούμε αργότερα ότι $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$).*

Πρόταση

Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, άρα είναι μετρήσιμο σύνολο.

... άρα κάθε αριθμ. τομή ανοικτών (G_δ) ή αριθμ. ένωση κλειστών (F_σ).

Προσέγγιση μετρησίμων συνόλων

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Το* A *είναι μετρήσιμο.*
2. *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ανοικτό* $G \subseteq \mathbb{R}$ *με* $A \subseteq G$ *και* $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.
3. *Υπάρχει* G_δ*-σύνολο* B *ώστε* $A \subseteq B$ *και* $\lambda^*(B \setminus A) = 0$.

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Το* A *είναι μετρήσιμο.*
2. *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει κλειστό* $F \subseteq \mathbb{R}$ *με* $F \subseteq A$ *και* $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.
3. *Υπάρχει* F_σ*-σύνολο* C *ώστε* $C \subseteq A$ *και* $\lambda^*(A \setminus C) = 0$.

(Άσκηση)

«Συνέχεια» του μέτρου

Παρατήρηση

Αν $X, Y \in \mathcal{M}$, $X \subseteq Y$ *και* $\lambda(X) < \infty$, *τότε* $\lambda(Y \setminus X) = \lambda(Y) - \lambda(X)$.

Πρόταση

(i) *Αν* (A_n) *είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και* $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *τότε*

$$\lambda(A_n) \to \lambda(A).$$

(ii) *Αν* (B_n) *είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με* $\lambda(B_1) < +\infty$ *και* $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, *τότε*

$$\lambda(B_n) \to \lambda(B).$$

Παρατήρηση: Στο (ii), αρκεί $\exists k : \lambda(B_k) < +\infty$.
Όμως π.χ. για $B_n = [n, \infty)$ δεν ισχύει.

Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Θεώρημα

Το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^k$ είναι κανονικό μέτρο.
Για κάθε K συμπαγές, έχουμε $\lambda(K) < \infty$ και για κάθε $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\} \\ &= \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό και } G \supseteq A\}\,.\end{aligned}$$

Απόδειξη για $k = 1$ στο `reg.pdf`.

Ένα μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου μπορεί να μην περιέχει ανοικτό ($\neq \emptyset$) διάστημα (παράδειγμα αργότερα). Όμως,

Θεώρημα (Steinhaus)

Αν A είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$B(0, \delta) \subseteq A - A.$$

Σύνοψη: Μέτρο Lebesgue

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ενός $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A \right\}.$$

Το $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμο ($A \in \mathcal{M}$) αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

Ισοδύναμα, αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.
Ισοδύναμα, αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

Όταν $A \in \mathcal{M}$, το μέτρο Lebesgue του A είναι εξ ορισμού το εξωτερικό του μέτρο.
Η οικογένεια $\mathcal{M}$ περιέχει όλα τα ανοικτά, και είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις (είναι σ-άλγεβρα). Υπάρχουν όμως και μη μετρήσιμα σύνολα.
Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ που παράγεται απ' τα ανοικτά λέγεται σ-άλγεβρα Borel.
Η απεικόνιση $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty] : A \mapsto \lambda^*(A)$ είναι σ-προσθετική: αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$ ξένα ανά δύο τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Το μέτρο λ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταθέσεις. Είναι κανονικό μέτρο.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Υπενθύμιση Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, θέλουμε να ορίσουμε το $\int f d\lambda$ προσεγγίζοντάς το με αθροίσματα της μορφής:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \lambda(f^{-1}([y_k, y_{k+1})))$$

όπου $\lambda =$ μέτρο Lebesgue. Χρειάζεται η μετρησιμότητα του: $f^{-1}([y_k, y_{k+1})) = \{x \in [a,b] : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\})$.

Ορισμός

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{M}$. Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *(Lebesgue) μετρήσιμη* αν

$$f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{M}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός

Έστω $Y \subseteq \mathbb{R}$ Borel. Μια συνάρτηση $f : Y \to \mathbb{R}$ λέγεται *Borel μετρήσιμη* ή απλώς *Borel* αν

$$f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{B}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Μετρήσιμες συναρτήσεις

(Συμβολισμός: $[f \leq b] := f^{-1}((-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \leq b\}$.)

Πρόταση

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{M}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Η f είναι μετρήσιμη.*
2. $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{M}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.
3. $f^{-1}([b, +\infty)) \in \mathcal{M}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.
4. $f^{-1}((b, +\infty)) \in \mathcal{M}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση Τότε, για κάθε διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$ (ή $J = \{a\}$) έχω $f^{-1}(J) \in \mathcal{M}$.

Πρόταση

Αν $\mathrm{B} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ *όπου* $X \in \mathcal{M}$, *η συνάρτηση* $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ *με*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \notin B \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $B \in \mathcal{M}$.

Συναρτήσεις Borel

Πρόταση

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{B}$ *και* $f : X \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η* f *είναι Borel μετρήσιμη.*
2. $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.
3. $f^{-1}([b, +\infty)) \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.
4. $f^{-1}((b, +\infty)) \in \mathcal{B}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση Τότε, για κάθε διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$ (ή $J = \{a\}$) έχω $f^{-1}(J) \in \mathcal{B}$.

Πρόταση

Αν $\mathrm{B} \subseteq X$ *όπου* $X \in \mathcal{B}$, *η συνάρτηση* $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ *με*
$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \notin B \end{cases}$ *είναι Borel μετρήσιμη αν-ν* $B \in \mathcal{B}$.

Παρατήρηση Η συνάρτηση Dirichlet είναι Borel μετρήσιμη.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τότε*

$$f \text{ συνεχής} \Rightarrow \ f \text{ Borel μετρήσιμη} \Rightarrow \ f \text{ Lebesgue μετρήσιμη.}$$

Παράδειγμα Η $\chi_{[0,1]}$ είναι Borel, όχι συνεχής.
Η χ_A όπου $A \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$ (υπάρχει τέτοιο σύνολο;) είναι Lebesgue μετρήσιμη, όχι Borel μετρήσιμη.

Πρόταση

Αν $X \subseteq \mathbb{R}$ *μετρήσιμο [αντ. Borel] και* $f : X \to \mathbb{R}$ *αύξουσα (ή φθίνουσα) συνάρτηση τότε η* f *είναι μετρήσιμη [αντ. Borel μετρήσιμη].*

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Έστω X *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *και* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

1. *Η* $f + g$ *είναι μετρήσιμη*
2. *Για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$ *η* λf *είναι μετρήσιμη.*
3. *Η* $f \cdot g$ *είναι μετρήσιμη.*
4. *Αν* $f(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in X$, *η* $1/f$ *είναι μετρήσιμη.*
5. *Οι* $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ *και* $|f|$ *είναι μετρήσιμες.*

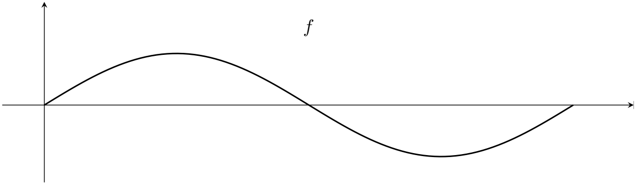
Άλλη προσέγγιση για τα (1) και (3):

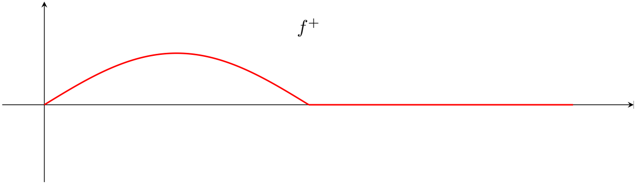
Πρόταση

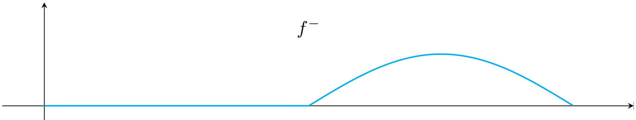
Έστω X *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *και* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *συνεχής, η συνάρτηση* $h : X \to \mathbb{R} : x \to F(f(x), g(x))$ *είναι μετρήσιμη.*

Οι συναρτήσεις f^+ και f^-

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = -\min\{f, 0\}, \quad f = f^+ - f^-,$$
$$|f| = f^+ + f^-$$







Μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [-\infty, +\infty]$

Ορισμός

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{M}$. Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, +\infty]$ λέγεται *(Lebesgue) μετρήσιμη* αν, για κάθε $b \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}([-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{M}.$$

Παρατήρηση Τότε, το σύνολο

$$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\}$$

είναι μετρήσιμο. Το ίδιο για το $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$.

Πρόταση

Μια $f : X \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη
ανν $\forall a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $f^{-1}([-\infty, a))$ είναι μετρήσιμο,
ανν $\forall a \in \mathbb{R}$ το $f^{-1}([a, +\infty])$ είναι μετρήσιμο,
ανν $\forall a \in \mathbb{R}$ το $f^{-1}((a, +\infty])$ είναι μετρήσιμο.

Η έννοια «σχεδόν παντού»

Ορισμός

Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι μια ιδιότητα $P(x)$ ισχύει σχεδόν παντού στο X (ή σχεδόν για κάθε $x \in X$) αν

$$\lambda^*(\{x \in X \mid \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}) = 0.$$

Πρόταση

Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$. Αν η f είναι μετρήσιμη και $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο X (θα γράφουμε $f = g$ σ.π.), τότε η g είναι μετρήσιμη.

Υπενθύμιση: $\limsup$, $\liminf$

Έστω (a_n) ακολουθία, $a_n \in [-\infty, \infty]$. Αν $\sup\{a_k : k \geq 1\} = +\infty$, θέτουμε $\limsup_n \alpha_n = +\infty$. Αν όχι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$.

Παρατηρούμε ότι $b_n \geq a_n$ για κάθε n και η (b_n) είναι φθίνουσα.

Συνεπώς το $\lim_n b_n$ υπάρχει και ισούται με $\inf_n b_n$.

Ορισμός

Αν (a_n) άνω φραγμένη, $\limsup_n a_n = \lim_n b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right)$

(αλλιώς, $\limsup_n a_n = +\infty$).

Ανάλογα,

Ορισμός

Αν (a_n) κάτω φραγμένη, $\liminf_n a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} a_k \right)$

(αλλιώς, $\liminf_n a_n = -\infty$).

Παρατήρηση Έστω (a_n) άνω φραγμένη, $a \in \mathbb{R}$. Τότε:

$a = \limsup_n a_n \iff$ για κάθε $\varepsilon > 0$, το $\{k \in \mathbb{N} : a_k \geq a + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο και το $\{k \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο και (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων, $f_n : X \to [-\infty, \infty]$.
Η $f = \sup_n f_n$ ορίζεται κατά σημείο:
$f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \in [-\infty, \infty]$ για κάθε $x \in X$.
Ομοίως $(\limsup_n f_n)(x) = \limsup_n f_n(x)$ για κάθε x.

Πρόταση

Αν κάθε f_n είναι μετρήσιμη,

- (α) *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*
- (β) *Οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*
- (γ) *Αν η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Παρατήρηση Η Πρόταση ΔΕΝ ισχύει για συνεχείς συναρτήσεις, ούτε για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Παραδείγματα;

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Πρόταση

Έστω X *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *και* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *μια συνάρτηση. Αν* $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ *μετρήσιμες συναρτήσεις και* $f_n(x) \to f(x)$ *σχεδόν παντού στο* X*, τότε η* f *είναι μετρήσιμη.*

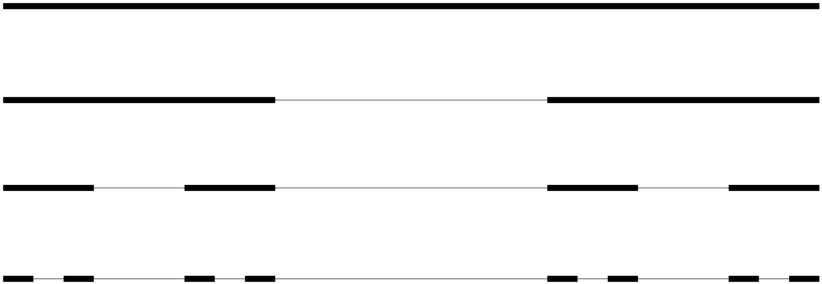
Το σύνολο Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

$$C_0 = [0,1]$$

$$C_1 = [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1]$$

$$C_2 = [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1]$$

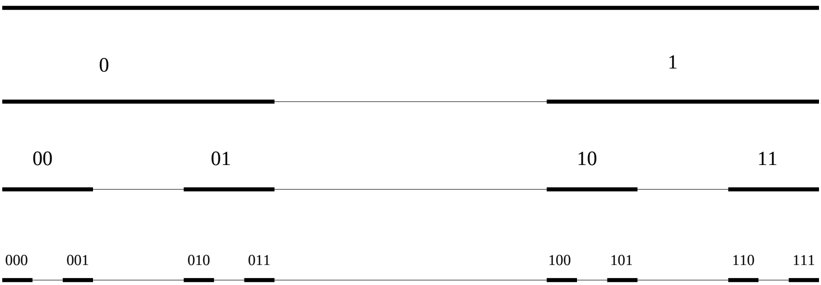
$$\vdots$$



Το σύνολο Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

Παρατήρηση

Το σύνολο Cantor έχει μέτρο Lebesgue μηδέν και είναι κλειστό και έχει κενό εσωτερικό. Είναι όμως υπεραριθμήσιμο.



Υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to C$.

Το σύνολο Cantor

Παρατήρηση

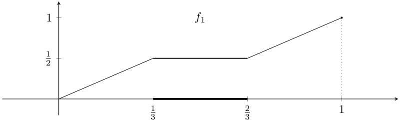
Το σύνολο Cantor είναι τέλειο, δηλαδή είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

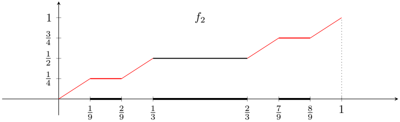
Παρατήρηση

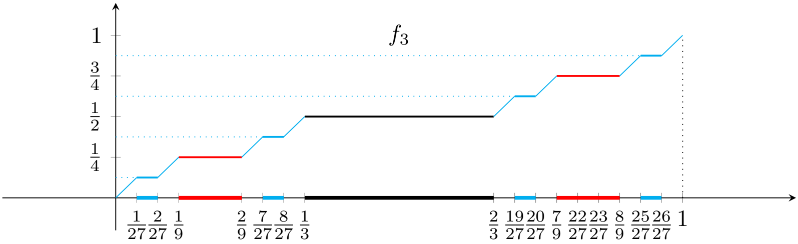
Για κάθε $a \in (0,1)$*, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο «τύπου Cantor»* C^a *(δηλ. συμπαγές, με κενό εσωτερικό, χωρίς μεμονωμένα σημεία) με μέτρο* a*.*

Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue ή «σκάλα του διαβόλου»

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής: Αν $J_1^n, \dots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ και $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n. Σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n, επεκτείνουμε γραμμικά ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.







Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue f

Πρόταση

Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση* $f : [0,1] \to [0,1]$. *Η* f *είναι αύξουσα και επί του* $[0,1]$. *Η* f *είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη: για κάθε* x *στο (ανοικτό) σύνολο* C^c*, υπάρχει η* $f'(x)$*, μάλιστα* $f'(x) = 0$.
Η εικόνα του C *μέσω της* f *έχει μέτρο* $\lambda(f(C)) = 1$ *(ενώ* $\lambda(C) = 0$*).*

Υπάρχει μετρήσιμο σύνολο που δεν είναι Borel: Αν $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, η g είναι ομοιομορφισμός του $[0,1]$ που στέλνει το C σε $g(C)$ θετικού μέτρου! Έπεται (Ασκ.) ότι υπάρχει $A \subseteq g(C)$ μη μετρήσιμο.Τότε το $B := g^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού $B \subseteq C$. Αλλά δεν είναι Borel: αν ήταν, τότε το $A = h^{-1}(B)$ όπου $h = g^{-1}$ (συνεχής) θα ήταν Borel, άρα μετρήσιμο.

Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν το σύνολο $s(X)$ των τιμών της είναι πεπερασμένο.

Κάθε απλή συνάρτηση γράφεται στην κανονική μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

όπου $s(X) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ και $A_j = s^{-1}(\{a_j\}) \in \mathcal{M}$.
Η $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ είναι (μετρήσιμη) διαμέριση του X.

Κάθε γραμμικός συνδυασμός $s = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ από χαρακτηριστικές μετρήσιμων συνόλων είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση. (Άσκηση)

Παράδειγμα

Έστω $s = \chi_{[-1,1]} + \chi_{[0,2]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Εδώ $s(\mathbb{R}) = \{0, 1, 2\}$.
Κανονική μορφή $s = 0\chi_A + 1\chi_B + 2\chi_{[0,1]}$ όπου
$A = [-1, 2]^c, \; B = [-1, 0) \cup (1, 2]$.

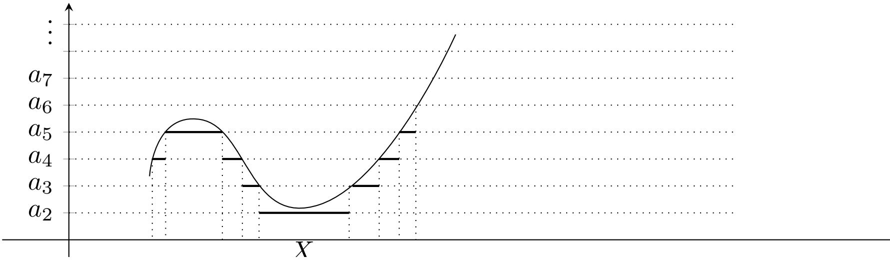
Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα

Έστω X *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *και* $f : X \to [0, \infty]$ *μια μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ *ώστε*

$$s_n \nearrow f \quad (\textit{κατά σημείο}).$$

Αν η f *είναι φραγμένη, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*



Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

(α) Αν f φραγμένη: Έστω $N \in \mathbb{N}$ με $f(x) < N$ για κάθε $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίζω το $[0, N)$ σε διαστήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$:

$$[0, N) = \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{2^n N - 1}{2^n}, \frac{2^n N}{2^n}\right).$$

Θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^n N.$$

Είναι μετρήσιμα σύνολα, διαμερίζουν τον X. Αν $x \in E_{n,i}$ ορίζω

$$s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$$

δηλαδή θέτω

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n N} \left(\frac{i-1}{2^n}\right) \chi_{E_{n,i}}.$$

Είναι απλή μετρήσιμη και προφανώς $0 \leq s_n \leq f$.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη (II)

Ισχυρισμός. $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τότε *για κάθε* n υπάρχει k ώστε $x \in E_{n,k}$, δηλ. $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$ ενώ $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, οπότε

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n$$

δηλ. $\sup\limits_{x \in X} |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ άρα $s_n \to f$ ομοιόμορφα.

(β) αν η f δεν είναι φραγμένη: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίζω το $[0, +\infty] = [0, n) \cup [n, +\infty]$ και

$$[0, n) = \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{2^n n - 1}{2^n}, \frac{2^n n}{2^n}\right).$$

Θέτω: $F_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$ και

$$E_{n,i} = \left\{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

Είναι μετρήσιμα σύνολα, διαμερίζουν το X.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη (III)

Ορίζω

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } f(x) \geq n \\ \frac{i-1}{2^n}, & \text{αν } \exists\, i = 1, 2, \ldots, n2^n \text{ ώστε } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \end{cases}$$

δηλαδή θέτω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Είναι απλή μετρήσιμη και προφανώς $0 \leq s_n \leq f$.

Ισχυρισμός. $s_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Αν $f(x) < +\infty$, υπάρχει $n_0 = n_0(x)$ ώστε $f(x) < n_0$. Όταν $n \geq n_0$ έχω $f(x) < n$ οπότε υπάρχει μοναδικό k ώστε $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$ ενώ $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, άρα

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n \geq n_0(x)$$

και συνεπώς $s_n(x) \to f(x)$. Αν πάλι $f(x) = +\infty$, τότε $f(x) \geq n$ για κάθε n, άρα $s_n(x) = n \to +\infty = f(x)$.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη (IV)

(γ) Ισχυρισμός. Η (s_n) είναι αύξουσα.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, να δείξω ότι $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

• Αν $f(x) \geq n+1$ τότε $s_{n+1}(x) = n+1$, αλλά $f(x) > n$ άρα $s_n(x) = n$, οπότε $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

• Αν $n+1 > f(x) \geq n$ τότε $\exists\, k : f(x) \in [\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}})$, αλλά $\frac{k}{2^{n+1}} \geq n$ (γιατί;) οπότε $s_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \geq n$ ενώ $s_n(x) = n$ αφού $f(x) \geq n$. Άρα $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

• Αν $f(x) < n$, $\quad \rightsquigarrow$

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη (V)

• Αν $f(x) < n$ τότε υπάρχει k ώστε $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$.
Τώρα $s_n(x) = \frac{k}{2^n}$ και

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right).$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

$$f(x) \in \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow s_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = s_n(x)$$
$$f(x) \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow s_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > s_n(x)$$

και στις δύο περιπτώσεις, $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$. $\square$

Προσέγγιση με απλές

Πόρισμα

Έστω X *μετρήσιμο και* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία* $(s_n)_n$ *απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με*

$$\begin{aligned} & s_n \to f \\ \textit{και} \quad & 0 \leq |s_1| \leq |s_2| \leq \cdots \leq |f|. \end{aligned}$$

Αν επιπλέον η f *είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

Παρατήρηση: Μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο $Y \subseteq X$ στο οποίο η $f|_Y$ είναι φραγμένη.

Οι τρεις αρχές του Littlewood

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $\lambda(X) < \infty$.

Πρόταση (Μετρήσιμα Σύνολα)

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $I_1, \dots, I_n$ ώστε το $E := I_1 \cup \dots \cup I_n$ να ικανοποιεί $\lambda(E \triangle X) < \varepsilon$.

Θεώρημα (Θεώρημα Luzin)

Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subseteq X$ κλειστό με $\lambda(X \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής.

Δείτε απόδειξη στο `luzin.pdf`.

Θεώρημα (Θεώρημα Egorov)

Αν $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες με $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο X, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subseteq X$ κλειστό με $\lambda(X \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε.

Απόδειξη πιο κάτω.

Οι τρεις αρχές του Littlewood, διαισθητική διατύπωση

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $\lambda(X) < \infty$.

[Μετρήσιμα Σύνολα] Κάθε τέτοιο $X \subseteq \mathbb{R}$ «είναι σχεδόν ίσο» με πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.

[Θεώρημα Luzin] Κάθε μετρήσιμη συνάρτηση στο X «είναι σχεδόν συνεχής».

[Θεώρημα Egorov] Κάθε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X που συγκλίνει κατά σημείο, «συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα».

Απόδειξη Egorov

Για κάθε k και $m \in \mathbb{N}$, έστω

$$E_m(k) = \{x : \exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Έχουμε $E_m(k)$ μετρήσιμα, $E_m(k) \supset E_{m+1}(k)$ για κάθε m και

$$\bigcap_{m \geq 1} E_m(k) = \{x : \forall m \, \exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$
$$\subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0\}$$

Όμως $f_n \to f$ σχεδόν παντού, άρα $\lambda\left(\cap_m E_m(k)\right) = 0$.
Επειδή $\lambda(E_1(k)) < +\infty$, έπεται ότι $\lim_m \lambda(E_m(k)) = 0$.
Επομένως για κάθε $\delta > 0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_{m_k}(k)) < \dfrac{\delta}{2^k}$.
Θέτω

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m_k}(k)$$

Απόδειξη Egorov (II)

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m_k}(k)$$

Τότε $A_\delta \in \mathcal{M}$ και

$$\lambda(A_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_{m_k}(k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Ισχυρισμός: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \backslash A_\delta$.
Απόδειξη : Έστω $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Επειδή $A_\delta \supseteq E_{m_k}(k)$, αν $x \notin A_\delta$ έχουμε $x \notin E_{m_k}(k)$ άρα για κάθε $n \geq m_k$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Αφού το m_k δεν εξαρτάται από το x έχουμε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c.

Οπότε αν πάρω κλειστό $F_\delta \subseteq (X \backslash A_\delta)$ με $\lambda((X \backslash A_\delta) \backslash F_\delta)) < \delta$ (κανονικότητα), τότε $\lambda(X \backslash F_\delta) < 2\delta$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο F_δ. □

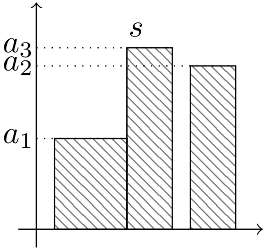
Αντιπαράδειγμα όταν $\lambda(X) = \infty$: $f_n = \chi_{(n,\infty)} \to 0$ κ.σ. Αλλά ...

Το ολοκλήρωμα Lebesgue: Ορισμοί

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο.
(α) Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ είναι απλή μετρήσιμη και $s(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$ ορίζουμε

$$\int s d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k) \in [0, +\infty]$$

όπου $A_k = s^{-1}(\{a_k\})$ (θέτουμε $0 \cdot (+\infty) = 0$).



Σχήμα: Ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης

Το ολοκλήρωμα Lebesgue: Ορισμοί

(β) Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, ορίζουμε

$$\int f d\lambda = \sup\left\{\int s d\lambda : s \text{ απλή μετρήσιμη}, 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Αν f απλή, οι ορισμοί (α) και (β) συμπίπτουν.

- Αν $A \subseteq X$ είναι μετρήσιμο, ορίζουμε $\int_A f d\lambda := \int f \chi_A d\lambda$.

- Αν η f ορίζεται σ' ένα μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq X$ και είναι μη αρνητική, επεκτείνουμε την f σε μια (μετρήσιμη) συνάρτηση $\tilde{f} : X \to [0, +\infty]$ θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ για $x \in X \setminus A$ και ορίζουμε $\int f d\lambda := \int \tilde{f} d\lambda$.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue: Ορισμοί

(γ) Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη. Οι συναρτήσεις $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$ είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f^+ d\lambda$ και $\int f^- d\lambda$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(δ) Μια $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μετρήσιμη και

$$\int |f| d\lambda < +\infty.$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue για απλές $f \geq 0$

Πρόταση

Αν $s_1, s_2 : X \to [0, +\infty)$ *απλές μετρήσιμες και* $a \geq 0$*, τότε*

- i $\int a s_1 d\lambda = a \int s_1 d\lambda$ *(θετικά ομογενές)*
- ii $\int (s_1 + s_2) d\lambda = \int s_1 d\lambda + \int s_2 d\lambda$ *(προσθετικό)*
- iii *αν* $s_1 \leq s_2$ *τότε* $\int s_1 d\lambda \leq \int s_2 d\lambda$ *(μονότονο).*

Για το (ii), χρειάζεται το (προσωρινό) λήμμα:

Λήμμα

Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ *απλή μετρήσιμη και* $s = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$ *όπου (απλώς)* $B_k \cap B_j = \emptyset$ *για* $k \neq j$*, τότε*

$$\int s d\lambda = \sum_{k=1}^{m} b_k \lambda(B_k).$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue για μετρήσιμες $f \geq 0$

Υπενθύμιση: Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη,

$$\int f d\lambda = \sup\left\{\int s d\lambda : s \text{ απλή μετρήσιμη}, 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Υπενθύμιση: Αν $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη και $A \in \mathcal{M}$,
$\int_A f d\lambda := \int \chi_A f d\lambda$.

Πρόταση

Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε

i. $\int a f d\lambda = a \int f d\lambda$.
ii. *Αν* $f \leq g$ *τότε* $\int f d\lambda \leq \int g d\lambda$.
iii. *Αν* $A \subseteq B$ $(A, B \in \mathcal{M})$ *τότε* $\int_A f d\lambda \leq \int_B f d\lambda$.
iv. *Αν* $A \in \mathcal{M}$ *και* $\lambda(A) = 0$ *ή* $f|_A = 0$ *τότε* $\int_A f d\lambda = 0$.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue για μετρήσιμες $f \geq 0$

Πρόταση (Ανισότητα Markov)

Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ *μετρήσιμη. Για κάθε* $a \geq 0$*,*

$$\int f d\lambda \geq a \cdot \lambda(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \, .$$

Πόρισμα

Αν $f : X \to [0, +\infty]$ *ολοκληρώσιμη (δηλ. μετρήσιμη και* $\int |f| d\lambda < \infty$*) τότε* $f(x) < \infty$ *σχεδόν για κάθε* $x \in X$*.*

Προσθετικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue

Η ισότητα $\int f d\lambda + \int g d\lambda = \int (f+g) d\lambda$ ισχύει για $f, g : X \to [0, +\infty]$ απλές μετρήσιμες.

Γενικότερα, αν οι $f, g : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμες;

Παρατηρούμε ότι ισχύει η

$$\int f d\lambda + \int g d\lambda \leq \int (f+g) d\lambda \,.$$

Ισότητα;; Να πάρουμε όρια απλών;

Είναι σωστό ότι $\int \lim f_n d\lambda \overset{;}{=} \lim \int f_n d\lambda$;;

Παραδείγματα (α) Στο $\mathbb{R}$: Έστω $f_n := \chi_{[n,n+1]}$. Έχω $f_n \to f = 0$ κ.σ., αλλά $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Η μάζα κάτω απ' τις f_n «φεύγει προς το άπειρο οριζόντια».)

(β) Στο $\mathbb{R}$: Έστω $f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Τώρα $f_n \to f = 0$ ομοιόμορφα αλλά $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Εδώ η μάζα «απλώνεται» σ' όλο το πλάτος του $\mathbb{R}_+$.)

(γ) Στο $[0,1]$: Έστω $f_n := n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$. Το μέτρο του χώρου είναι πεπερασμένο, και $f_n \to f = 0$ κατά σημείο (όχι ομοιόμορφα). Πάλι $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Εδώ η μάζα «φεύγει προς το άπειρο κατακόρυφα».)

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω $X \in \mathcal{M}$ *και* $f_n : X \to [0, \infty]$ *μια* *αύξουσα* *ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\lim_n \left(\int f_n \, d\lambda \right) = \int (\lim_n f_n) \, d\lambda \,.$$

Θα χρειασθεί το (προσωρινό) Λήμμα:

Λήμμα

Έστω $X \in \mathcal{M}$ *και* $s : X \to [0, \infty]$ *απλή μετρήσιμη συνάρτηση.*
Αν (E_n) *είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *τότε*

$$\int_E s d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} s d\lambda.$$

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

Συνέπεια: Αν $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, τότε

$$\int f d\lambda = \lim \int s_n d\lambda$$

όπου (s_n) αύξουσα ακολουθία απλών $s_n \geq 0$ με $s_n \nearrow f$.

Ερωτήσεις: (α) Ισχύει to Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για φθίνουσες ακολουθίες;

(β) Μήπως ισχύει υπό προϋποθέσεις;

Πρώτες συνέπειες Θ. Μονότονης Σύγκλισης

Πρόταση (Προσθετικότητα)

Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ *μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g) d\lambda = \int f d\lambda + \int g d\lambda.$$

Θεώρημα (Beppo Levi)

Αν (f_n) *μετρήσιμες,* $f_n : X \to [0, +\infty]$, *τότε*

$$\int \left(\sum_n f_n \right) d\lambda = \sum_n \left(\int f_n d\lambda \right).$$

Πρόταση (Λήμμα Fatou)

Αν $f_n : X \to [0, +\infty]$ *είναι μετρήσιμες, τότε*

$$\int (\liminf_n f_n) d\lambda \leq \liminf_n \int f_n d\lambda.$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Υπενθύμιση ορισμών:

• Έστω $X \in \mathcal{M}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη. Οι συναρτήσεις $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$ είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f^+ d\lambda$ και $\int f^- d\lambda$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

• Μια $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μετρήσιμη και

$$\int |f| d\lambda < +\infty.$$

Παρατηρήσεις • Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε $f(x) \in \mathbb{R}$ σχεδόν για κάθε $x \in X$.

• Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν οι f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες και τότε $\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda \in \mathbb{R}$.

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα

Αν $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι ολοκληρώσιμες και* $c \in \mathbb{R}$, *τότε*
(η $f + cg$ *ορίζεται καλά σχ. π. και)*

$$\int (f + cg) d\lambda = \int f d\lambda + c \int g d\lambda.$$

Πρόταση

Αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι ολοκληρώσιμη και* $A, B \in \mathcal{M}$ *με* $A \cap B = \emptyset$, *τότε*

$$\int_{A \cup B} f d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_B f d\lambda\,.$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Αν $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι ολοκληρώσιμες τότε*

$$(i) \qquad f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f d\lambda \leq \int g d\lambda.$$

$$(ii) \qquad \left| \int f d\lambda \right| \leq \int |f| d\lambda$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Έστω $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *ολοκληρώσιμες.*

(i) Αν $f = g$ *σχ.π. τότε* $\int f d\lambda = \int g d\lambda$.

(ii) $f = 0$ *σχ.π. αν και μόνον αν* $\int_A f d\lambda = 0$ *για κάθε* $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{M}$.

Πόρισμα

Αν $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι ολοκληρώσιμες και* $f \leq g$ *σχ.π. τότε*
$\int f d\lambda \leq \int g d\lambda$.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ που συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in X$ σε μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, +\infty]$. Αν υπάρχει $g : X \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη ώστε $|f_n| \leq g$ σχ. π. για κάθε n, τότε

$$\begin{aligned} &\text{η } f \text{ είναι (απολύτως) ολοκληρώσιμη} \\ \text{και} \quad &\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\lambda = 0 \\ \text{και} \quad &\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \int f d\lambda. \end{aligned}$$

Δες και τα αντιπαραδείγματα: [114] όταν δεν υπάρχει «κυριαρχούσα» g ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι οι f_n και f είναι ολοκληρώσιμες. Για τη σύγκλιση:

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης: Απόδειξη σύγκλισης

Θέτουμε $h_n = |f_n - f|$ και παρατηρούμε ότι $0 \leq h_n \leq 2g$ σχ. π. και ότι $h_n(x) \to 0$ σχεδόν για κάθε x. Άρα $2g - h_n \geq 0$ και $2g - h_n \to 2g$ κατά σημείο, σχεδόν παντού.
Από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf_n (2g - h_n) d\lambda \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\lambda \,.$$

$$\text{Αλλά} \quad \int \liminf_n (2g - h_n) d\lambda = \int 2g d\lambda$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad \liminf_n \int (2g - h_n) d\lambda &= \int 2g d\lambda + \liminf_n \int (-h_n) d\lambda \\ &= \int 2g d\lambda - \limsup_n \int h_n d\lambda \,, \end{aligned}$$

$$\text{επομένως} \quad \limsup_n \int h_n d\lambda \leq 0 \,.$$

Από την άλλη μεριά όμως, $0 \leq \int h_n d\lambda$ άρα $0 \leq \liminf_n \int h_n d\lambda$.

Συνεπώς το όριο $\lim_n \int h_n d\lambda$ υπάρχει και είναι 0. $\square$

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Πόρισμα (Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης)

Έστω $X \in \mathcal{M}$ *με* $\lambda(X) < \infty$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ *μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* $f : X \to \mathbb{R}$ *ώστε* $f_n \to f$ *σ.π. Υποθέτουμε ότι επιπλέον υπάρχει* $M > 0$ *ώστε* $|f_n| \leq M$ *σ.π. στο* X *για κάθε* n*. Τότε οι* f_n *και η* f *είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:*

$$\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0.$$

Από αυτή τη σύγκλιση έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Πόρισμα

Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ *ολοκληρώσιμη. Τότε η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, d\lambda := \int_{(-\infty, x]} f \, d\lambda$$

είναι συνεχής.

Πόρισμα

Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ *ολοκληρώσιμη. Αν* $E_n \in \mathcal{M}, \; E_n \subseteq E_{n+1}$ *για κάθε* n *και* $E = \bigcup E_n$*, τότε*

$$\int_E f \, d\lambda = \lim_n \int_{E_n} f \, d\lambda \, .$$

Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Μία διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \\ U(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Τα $L(f,\mathcal{P})$ και $U(f,\mathcal{P})$ ονομάζονται κάτω και άνω άθροισμα Riemann της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Κάθε Riemann ολοκληρώσιμη f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(t)dt = \int f d\lambda$

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad U(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Έστω g_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\displaystyle\int_a^b g_n(x)\,dx = L(f,P_n)$

(δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ θέτω

$g_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η κλιμακωτή συνάρτηση με

$\displaystyle\int_a^b u_n(x)\,dx = U(f,P_n)$. Τότε, $g_n \leq f \leq u_n$. Η (g_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε $\exists g := \lim_n g_n$ και $u := \lim_n u_n$ και $g \leq f \leq u$. Οι u και g είναι όρια μονότονων ακολουθιών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Άρα [4]

$$\int_a^b u \, d\lambda \overset{(?)}{=} \lim_n \int_a^b u_n \, d\lambda \overset{(!)}{=} \lim_n \int_a^b u_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

και

$$\int_a^b g \, d\lambda \overset{(?)}{=} \lim_n \int_a^b g_n \, d\lambda \overset{(!)}{=} \lim_n \int_a^b g_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

άρα $g = u$ σχεδόν παντού. Αφού $g \leq f \leq u$, προκύπτει ότι $g = f = u$ σχεδόν παντού.
Οπότε, $f = \lim g_n$ σχεδόν παντού, άρα η f είναι μετρήσιμη και

$$\int_a^b f \, d\lambda = \lim_n \int_a^b g_n \, d\lambda = \int_a^b g \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

---

[4] Αφού u_n κλιμακωτή, $\int_a^b u_n d\lambda \overset{(!)}{=} \int_a^b u_n(x) dx$.

Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Απόδειξη Αργότερα (αν υπάρξει χρόνος).

Παρατήρηση Η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ είναι σχεδόν παντού συνεχής, αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση.
Αντίθετα η συνάρτηση Dirichlet δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$.

Ο χώρος $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$

Ορισμός

Αν $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο, ο χώρος $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f| d\lambda < +\infty$. Ο αριθμός $\int_X |f| d\lambda$ συμβολίζεται $\|f\|_1$.

Παρατηρήσεις (i) Αν η $f : X \to [-\infty, +\infty]$ είναι (απολύτως) ολοκληρώσιμη τότε η f παίρνει σχεδόν παντού πραγματικές τιμές, άρα είναι σχεδόν παντού ίση με μια $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$.
Καταχρηστικά λέμε ότι $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$.

(ii) Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $f + \lambda g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ και

1. $\|\lambda g\|_1 = |\lambda| \|g\|_1$
2. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
3. $\|f\|_1 = 0$ αν και μόνον αν $f = 0$ σχεδόν παντού.

Πληρότητα: Το Θεώρημα Riesz-Fischer

Ορισμός

Έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f κατά μέσο ή στον L^1 αν

$$\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0.$$

(ii) Η $\{f_n\}$ είναι βασική ή Cauchy κατά μέσο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$ να ισχύει $\int |f_n - f_m| \, d\lambda < \varepsilon$.

Θεώρημα (Riesz-Fischer)

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$.

- *Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, τότε υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ στον $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ ώστε $f_n \to f$ κατά μέσο.*
- *Επιπλέον υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ σχεδόν παντού.*

Ο χώρος $(L^1_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_1)$

Ο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_1$ είναι *ημινόρμα* σ' αυτόν. Θέτω

$$\mathcal{N} = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{μετρήσιμη}, f = 0 \text{ σχεδόν παντού}\}.$$

Παρατήρηση: $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X) : \|f\|_1 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathcal{L}^1$, έχουμε: $f = g$ σχεδόν παντού $\iff$ $f - g \in \mathcal{N}$.
Επίσης, ο $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^1$.

Στον χώρο πηλίκο $L^1_{\mathbb{R}}(X) := \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)/\mathcal{N}$, θέτω $\|[f]_{\mathcal{N}}\|_1 := \|f\|_1$, όπου $[f]_{\mathcal{N}} := \{f + g : g \in \mathcal{N}\}$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα.

Δηλαδή ο $L^1_{\mathbb{R}}(X)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ modulo ισότητα σχεδόν παντού. Ταυτίζουμε την κλάση $[f]_{\mathcal{N}} \in L^1_{\mathbb{R}}(X)$ με έναν αντιπρόσωπο $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$.

Το Θεώρημα Riesz-Fischer λέει ακριβώς ότι ο χώρος $(L^1_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach.

Ο χώρος $(L^p_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_p)$ όπου $1 \leq p < \infty$

Έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο, ο χώρος $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$ που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^p d\lambda < +\infty$.

Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{1/p}$ συμβολίζεται $\|f\|_p$.

Στον χώρο πηλίκο $L^p_{\mathbb{R}}(X) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X)/\mathcal{N}$
(όπου $\mathcal{N} = \{f : X \to \mathbb{R} :$ μετρήσιμη, $f = 0$ σχεδόν παντού $\})$, θέτω $\|[f]_{\mathcal{N}}\|_p := \|f\|_p$, όπου $[f]_{\mathcal{N}} := \{f + g : g \in \mathcal{N}\}$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα.

Θεώρημα (Riesz-Fischer)

Ο χώρος $(L^p_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach: Αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ του $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X)$ είναι Cauchy ως προς την $\|\cdot\|_p$, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ στον $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X)$ ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Προσέγγιση στον $(L^p_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_p)$

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Ονομάζουμε $\mathcal{S}(X)$ το σύνολο των (κλάσεων ισοδυναμίας modulo ισότητα σχεδόν παντού) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $s : X \to \mathbb{R}$ με $\lambda(\{x \in X : s(x) \neq 0\}$.

Πρόταση

Ο $\mathcal{S}(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $L^p_{\mathbb{R}}(X)$ και είναι πυκνός στον $(L^p_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_p)$.

Ονομάζουμε $C_c(\mathbb{R})$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχουν συμπαγή φορέα, δηλ. υπάρχει $K(f) \subseteq \mathbb{R}$ *συμπαγές* ώστε $f(x) = 0$ όταν $x \notin K(f)$.

Πρόταση

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $L^p_{\mathbb{R}}(X)$ και είναι πυκνός στον $(L^p_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_p)$.

Μέρος III

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^1$ και $\mathscr{L}^2$

Μιγαδικές συναρτήσεις στον $\mathbb{T}$ (Υπενθύμιση)

Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f(\theta) = \phi(e^{i\theta}).$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π-περιοδική.
Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $\phi(e^{i\theta}) = f(\theta)$ είναι καλά ορισμένη.
Έχουμε λοιπόν μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και τις 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Στη συνέχεια, δεν θα κάνουμε διάκριση ανάμεσα στις ϕ και f.

Χώροι $L^p(\mathbb{T})$

Αν $p \in [1, \infty)$, με το σύμβολο $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ εννοούμε το σύνολο των μετρήσιμων (*) *συναρτήσεων* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p d\lambda(t) < \infty \qquad \text{(μέτρο Lebesgue).}$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{d\lambda(t)}{2\pi} \right)^{1/p} .$$

Παρατηρούμε ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνον αν $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t.

(*) Η $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ λέγεται μετρήσιμη ανν οι $u := \mathrm{Re}\, h = \frac{1}{2}(h + \bar{h})$ και $v := \mathrm{Im}\, h = \frac{1}{2i}(h - \bar{h})$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$.
Παρατηρήστε ότι τότε η $|h| = (u^2 + v^2)^{1/2}$ είναι μετρήσιμη (γιατί;).

Χώροι $L^p(\mathbb{T})$

Με το σύμβολο $L^p(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, των $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, modulo ισότητα σχεδόν παντού. (γράφουμε f αντί για $[f]$.)

Ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι (μιγαδικός) γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(\mathbb{T})$ ως προς την οποία ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach (Θεώρημα Riesz-Fischer). Ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert ως προς το $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{g(t)}d\lambda(t)$.

Εδώ $\int h d\lambda := \int \mathrm{Re}\, h\, d\lambda + i \int \mathrm{Im}\, h\, d\lambda$ όπου $\mathrm{Re}\, h = \frac{1}{2}(h+\bar{h})$, $\mathrm{Im}\, h = \frac{1}{2i}(h-\bar{h})$.

Παρατήρηση

Η απεικόνιση $\mathcal{J} : f \to \int f d\lambda : L^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ *είναι γραμμική απεικόνιση, και είναι θετική δηλ. αν* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *και* $f(t) \in \mathbb{R}_+$ *σ.π. τότε* $\mathcal{J}(f) \geq 0$.

Έπεται ότι $\left|\int g d\lambda\right| \leq \int |g| d\lambda \quad \forall g \in L^1(\mathbb{T})$.

Χώροι L^p

Αν $1 \leq p \leq q < \infty$ και f μετρήσιμη, έχουμε $\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$, άρα

$$C(\mathbb{T}) \subseteq L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$$

(έχουμε ταυτίσει τον $C(\mathbb{T})$ με τον χώρο των συνεχών 2π περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.)

Πρόταση

Αν $p \in [1, \infty)$, ο χώρος των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων, ο χώρος των κλιμακωτών συναρτήσεων και ο $C(\mathbb{T})$ είναι πυκνοί στον $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^1$

Ορισμός (Συντελεστές Fourier)

Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} d\lambda(t) \qquad (k \in \mathbb{Z}) .$$

Εδώ $\displaystyle\int f d\lambda := \int \mathrm{Re} f \, d\lambda + i \int \mathrm{Im} f \, d\lambda$ όπου
$\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $\mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$.

Παρατήρηση. Η συνάρτηση $S_n(f) = \displaystyle\sum_{|k| \le n} \hat{f}(k) e_k$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, άρα συνεχής (και 2π-περιοδική) συνάρτηση, όποια κι αν είναι η $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^1$

Παρατήρηση

Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. *Τότε*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_1 \ \textit{για κάθε}\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\textit{δηλαδή} \ \ \|\widehat{f}\,\|_\infty \leq \|f\|_1 \,.$$

Πρόταση (Λήμμα Riemann-Lebesgue)

Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. *Τότε*

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0\,.$$

Δηλαδή $(\widehat{f}(k)) \in c_0(\mathbb{Z})$.

Ισοδύναμα,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0\,.$$

Θεώρημα Μοναδικότητας στον L^1

Παρατήρηση Αν αλλάξουμε της τιμές μιας συνάρτησης του $\mathcal{L}^1$ σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, οι συντελεστές Fourier της παραμένουν οι ίδιοι.
Με άλλα λόγια,
Αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Ισχύει και το αντίστροφο:

Θεώρημα

Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$
(ii) $f = g$ σ. π.. Δηλαδή, οι f και g ορίζουν το ίδιο στοιχείο του $L^1(\mathbb{T})$.

Πρόταση

Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$, ισχύει $\|\sigma_n(f)\|_1 \leq \|f\|_1$.

Πρόταση

Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$, ισχύει $\lim_n \|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0$.

Συμπέρασμα : Ο χώρος των τριγ. πολυωνύμων είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{T})$.
Αποδείξεις στο `L1uniq.pdf`.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^2$

Λήμμα βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης (δες και το (21)):

Έστω $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$ και p τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\deg(p) \leq n$. Τότε $\|f - p\|_2 \geq \|f - S_n(f)\|_2$. Μάλιστα:

$$\|p\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |\widehat{p}(k)|^2$$

$$\begin{aligned} \|f - p\|_2^2 &\overset{(!)}{=} \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f) - p\|_2^2 \\ &= \|f - S_n(f)\|_2^2 + \sum_{|k| \leq n} |\widehat{f}(k) - \widehat{p}(k)|^2 \end{aligned}$$

$$(p = S_m(f)) : \quad \|f - S_m(f)\|_2^2 \geq \|f - S_n(f)\|_2^2 \quad \text{αν } m \leq n$$

$$(p = 0) : \quad \|f\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)\|_2^2 \geq \|S_n(f)\|_2^2$$

Άρα $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$ (Bessel).

Πόρισμα $\quad \|f - \sigma_n(f)\|_2 \geq \|f - S_n(f)\|_2$. (βάλε $p = \sigma_n(f)$)

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^2$

Υπενθύμιση Fejér: Αν $g \in C(\mathbb{T})$, τότε $\lim_n \|g - \sigma_n(g)\|_\infty = 0$.
Άρα $\lim_n \|g - \sigma_n(g)\|_2 = 0$. Άρα $\lim_n \|g - S_n(g)\|_2 = 0$.
Από πυκνότητα της $C(\mathbb{T})$ στον $L^2(\mathbb{T})$ και $\|f\|_2 \geq \|S_n(f)\|_2$ έπεται

Πρόταση

Αν $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, τότε $S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 d\lambda = 0.$$

Άρα $|\,\|S_n(f)\|_2 - \|f\|_2\,| \leq \|S_n(f) - f\|_2 \to 0$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\leq n} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 .$$

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^2$

Πρόταση (Ισότητα Parseval)

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \quad \textit{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g} d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Πόρισμα

Η απεικόνιση

$$\mathcal{F}_2 : (L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \to \widehat{f}$$

είναι καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία.

(Μοναδικότητα) Ειδικότερα, η $f \to \widehat{f}$ *είναι 1-1 στον* $L^2(\mathbb{T})$*: Αν* $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$*, τότε οι* f *και* g *ορίζουν το ίδιο στοιχείο του* $L^2(\mathbb{T})$*, είναι δηλαδή ίσες σχεδόν παντού.*

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^2$

Η απεικόνιση $\mathcal{F}_2 : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2}) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^2}) : f \to (\hat{f}(k))_k \in \mathbb{Z}$ είναι ισομετρία, άρα 1-1, με πυκνή εικόνα, αλλά όχι επί (γιατί;).
Η πληρότητα του $L^2(\mathbb{T})$ δίνει:

Πρόταση

Η $\mathcal{F}_2$ απεικονίζει τον $L^2(\mathbb{T})$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$:
Αν $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ ώστε $\hat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Μάλιστα αν $f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ ισχύει ότι $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$.

Σχέδιο Απόδειξης Αφού

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \sum_k |\hat{f}_n(k)|^2 = \sum_{|k|\le n} |c_k|^2$$

η (f_n) είναι βασική στη νόρμα του $L^2(\mathbb{T})$.
Άρα (πληρότητα!) υπάρχει $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$.
Τότε $\hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle = \lim_n \langle f_n, e_k\rangle = \lim_n \hat{f}_n(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπενθύμιση

Αν δοθεί συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$,

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\lambda(x), \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_m = b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)d\lambda(x), \quad (m = 1, 2, ...)$$

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-ikx)d\lambda(x) = \langle f, e_k \rangle, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{rlllrl}
\widehat{f}(n) = & \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & (n > 0) & \quad & a_n = & \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \\
\widehat{f}(0) = & \frac{1}{2}a_0, & (n = 0) & & a_0 = & 2\widehat{f}(0) \\
\widehat{f}(-n) = & \frac{1}{2}(a_n + ib_n), & (n > 0) & & b_n = & i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))
\end{array}$$

Μια τριγωνομετρική σειρά που δεν είναι σειρά Fourier μιας $L^1(\mathbb{T})$

Η τριγ. σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$ συγκλίνει για κάθε $t \neq 2k\pi$ (κριτήριο Dirichlet) αλλά δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Riemann-ολοκληρώσιμης συνάρτησης γιατί τα μερικά της αθροίσματα δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Όμως, είναι σειρά Fourier μιας $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k}\right|^2 < \infty$.

Θα δείξουμε ότι η συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\log n}$$

(σειρά ημτόνων) δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Lebesgue-ολοκληρώσιμης συνάρτησης, ενώ η αντίστοιχη σειρά συνημιτόνων

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n}$$

είναι!

Αποδείξεις στο `nofou.pdf`.

Μια τριγωνομετρική σειρά που δεν είναι σειρά Fourier μιας $L^1(\mathbb{T})$

Πρόταση

Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $-\hat{f}(-n) = \hat{f}(n) \geq 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{f}(n) < \infty.$$

... οπότε δεν μπορεί να έχει σειρά Fourier την $\sum \frac{\sin nt}{\log n}$.

Πρόταση

Έστω $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ και $a_n \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ με

$$\hat{f}(k) = a_{|k|} \quad \text{για κάθε} \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

... οπότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum \frac{\cos nt}{\log n}$.

Χρησιμοποιήσαμε δύο Λήμματα:

Λήμμα

Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ *και* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\lambda(t) = 0$, *τότε το αόριστο ολοκλήρωμα* g *της* f,

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)d\lambda(t), \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

ικανοποιεί $ik\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$ *και* $g(-\pi) = g(\pi)$ *και είναι συνεχής (ανήκει στον* $C(\mathbb{T})$*).*

Λήμμα

Αν (a_n) *είναι μια μηδενική ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα* $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0.$$