605. Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 23/5/2018

1. (2μ) (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αντίστροφα, αν η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ στο διάστημα $[-\pi, \pi)$ και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

2. (2μ) (α) Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ οικογένεια καλών πυρήνων. Αποδείξτε ότι: αν η $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ τότε $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$.

(β) Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $K_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\varphi(x/\delta)$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

3. (2μ) (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0.$$

(β) Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant \alpha$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geqslant 1$,

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{και} \quad \|s_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + 2\alpha.$$

4. (2μ) (α) Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$.

(β) Έστω $g, h \in L_2(\mathbb{T})$. Αν $f = g * h$, αποδείξτε ότι $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)\widehat{h}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

5. (2μ) (α) Θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} a_k e^{ikx}$, όπου $a_k \in \{-1, 1\}$ για κάθε $|k| \leqslant N$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|p(x_0)| \geqslant \sqrt{2N+1}$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ισχύει η ταυτότητα

$$\pi b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n} \left[f\left(\frac{2k\pi}{n} + \theta\right) - f\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \theta\right)\right] \sin n\theta\, d\theta.$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και συμπεράνατε ότι αν η f είναι φθίνουσα στο $(0, 2\pi)$ τότε $b_n \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. (3μ) (α) Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

Καλή Επιτυχία!