Τομές του n-διάστατου κύβου

Γεώργιος Ντούλιος

Περίληψη

Έστω $Q_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ ο n-διάστατος κύβος. Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $\sigma(a,t) = \lambda_{n=1}(H(a,t) \cap Q_n)$, όπου $H(a,t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = t\}$. O Ball απέδειξε ότι

$$\sigma(a,t) \leqslant \sqrt{2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν $t = 0$ και $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e_i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_j$ για κάποια $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Δηλαδή όταν το $H(a,t) \cap Q_n$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $(n-2)$-κύβου $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{n-2}$ και της διαγωνίου του τετραγώνου $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$. Προυσιάζουμε την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος. Βασικό ρόλο παίζουν ο μετασχηματισμός Fourier και η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right|^s dx \leqslant \sqrt{\frac{2}{s}}, \qquad s > 2$$

για την απόδειξη της οποίας ακολουθούμε τους Nazarov και Podkorytov.

1 Εισαγωγή

Ο n-**διάστατος μοναδιαίος κύβος** στον $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο

$$Q_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], i = 1, \dots, n\right\}. \tag{1.1}$$

Έστω $a \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$. Αν $t \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$H(a,t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = t\} \tag{1.2}$$

το ονομάζουμε **υπερεπίπεδο**. Το $H(a,0)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\langle a\rangle$, ο υπόχωρος διάστασης $n-1$ του $\mathbb{R}^n$ που είναι κάθετος στο a ($x \in H(a,0) \iff \langle x, a\rangle = 0$, δηλαδή $x \perp a$). Ο $H(a,t)$ είναι παράλληλη μετατόπιση του $H(a,0)$: συγκεκριμένα,

$$H(a,t) = \{x + ta \mid x \in H(a,0)\}. \tag{1.3}$$

Δηλαδή, το $H(a,t)$ είναι παράλληλο στο $H(a,0)$, διέρχεται από το σημείο ta και είναι κάθετο στην ευθεία $\{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (για $t \neq 0$, το $H(a,t)$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$).

Στον $\mathbb{R}^n$, έστω ότι έχουμε τον κύβο Q_n και ένα υπερεπίπεδο $H(a,t)$, όπου $a \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$, και $t \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να δούμε τι γίνεται με το $(n-1)$-διάστατο μέτρο της τομής τους $Q_n \cap H(a,t)$, ή μάλλον πόσο μεγάλο ή μικρό μπορεί να γίνει. Έστω $\sigma(a,t)$ αυτό το μέτρο.

Η απάντηση δόθηκε από τον Ball [1] και δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1 (Ball). *Για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι*

$$\sigma(a,t) = \lambda_{n-1}(H(a,t) \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2}. \tag{1.4}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $t = 0$ και $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e_i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_j$ για κάποια $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Δηλαδή όταν το $H(a,t) \cap Q_n$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $(n-2)$-κύβου $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{n-2}$ και της διαγωνίου του τετραγώνου $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$.

2 Απόδειξη του θεωρήματος

Ας δούμε πρώτα ότι το εμβαδόν ($(n-1)$-διάστατο μέτρο) του $H(a,0) \cap Q_n$ για $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e_i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_j$ για $i \neq j$ είναι πράγματι $\sqrt{2}$. Αν για παράδειγμα $a = \frac{1}{\sqrt{2}}e_i + \frac{1}{\sqrt{2}}e_j$ τότε αν $\langle x, a\rangle = 0$ έχουμε $\langle x, e_i\rangle = -\langle x, e_j\rangle$, δηλαδή το x βρίσκεται σε μια κύρια διαγώνιο του επιπέδου $\mathrm{span}\langle e_i, e_j\rangle$ (ακριβέστερα, η προβολή του $x \in \mathbb{R}^n$ στο επίπεδο των e_i, e_j βρίσκεται στη διαγώνιο, ενώ οι υπόλοιπες συντεταγμένες του x δεν περιορίζονται). Άρα, το $H(a,0) \cap Q_n$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο της κύριας διαγωνίου του 2-διάστατου τετραγώνου $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ στο $\mathrm{span}\langle e_i, e_j\rangle$ και του κύβου $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{n-2}$. Δηλαδή, αν Δ είναι η διαγώνιος του τετραγώνου, τότε $H(a,0) \cap Q_n = \Delta \times Q_{n-2}$. Το Q_{n-2} έχει $(n-2)$-διάστατο μέτρο 1 και το Δ έχει 1-μέτρο $\sqrt{2}$, άρα το $H(a,0) \cap Q_n$ έχει $(n-1)$-διάστατο μέτρο $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, δηλαδή $\sigma(a,0) = \sqrt{2}$.

Επίσης, με την ανισότητα Brunn-Minkowski μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Ισχυρισμός 2.1. *Για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$, και για κάθε $t \in \mathbb{R}$,*

$$\sigma(a,t) \leqslant \sigma(a,0). \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $A = [H(a,t) \cap Q_n] - ta = H(a,0) \cap (Q_n - ta)$ και $B = [H(a,-t) \cap Q_n] + ta = H(a,0) \cap (Q_n + ta)$. Τότε, έχουμε

- $\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \subseteq Q_n$: αν $\gamma \in \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$ τότε υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ώστε $\gamma = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, αλλά $\alpha \in Q_n - ta$ και $\beta \in Q_n + ta$, άρα

  $$\gamma = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \in \frac{1}{2}(Q_n - ta) + \frac{1}{2}(Q_n + ta) = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2}Q_n = Q_n \tag{2.2}$$

  διότι το Q_n είναι κυρτό.

- $\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \subseteq H(a,0)$, διότι το $H(a,0)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $A, B \subseteq H(a,0)$.

- $B = -A$: αν $x \in A$ τότε $x + ta \in H(a,t) \cap Q_n$, άρα $-x - ta \in H(a,-t) \cap Q_n$ (διότι $-Q_n = Q_n$ και $-H(a,t) = H(a,-t)$), άρα $-x \in [H(a,-t) \cap Q_n] + ta = B$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι αν $x \in B$ τότε $-x \in A$.

- Ειδικότερα, $\lambda_{n-1}(B) = \lambda_{n-1}(-A) = \lambda_{n-1}(A)$.

Άρα, $\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \subseteq H(a,0) \cap Q_n$. Έχουμε

$$\sigma(a,0) = \lambda_{n-1}(H(a,0)\cap Q_n) \geqslant \lambda_{n-1}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right). \tag{2.3}$$

Τώρα έχουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski:

$$\begin{aligned}\left[\lambda_{n-1}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} &\geqslant \frac{1}{2}\left[\lambda_{n-1}(A)\right]^{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{2}\left[\lambda_{n-1}(B)\right]^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left[\lambda_{n-1}(A)\right]^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sigma(a,0) \geqslant \lambda_{n-1}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \geqslant \lambda_{n-1}(A) = \lambda_{n-1}(H(a,t)\cap Q_n) = \sigma(a,t). \tag{2.4}$$

□

Έστω $a \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι συντεταγμένες $a_j \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, αλλιώς αναγόμαστε σε ένα όμοιο πρόβλημα για τον κύβο χαμηλότερης διάστασης. Παίρνοντας υπόψη τις συμμετρίες του κύβου, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $a_j > 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

Μια αρχική παρατήρηση είναι ότι αν $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ τότε $\sigma(a,t) \leqslant \frac{1}{a_i}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $\sigma(a,0)$ είναι το εμβαδόν της τομής $H(a,0)\cap Q_n$, προβάλλοντας το σύνολο αυτό πάνω στο $H(e_i,0)$ μέσω της $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $\pi_i(x) = \langle x, e_i\rangle e_i$, βλέπουμε ότι η προβολή έχει εμβαδόν ίσο με $\sigma(a,0)\cdot\langle a, e_i\rangle = \sigma(a,0)\cdot a_i$. Η προβολή αυτή είναι υποσύνολο του $H(e_i,0)\cap Q_n$, άρα

$$\sigma(a,0)\cdot a_i \leqslant \sigma(e_i,0) = 1, \ \ \text{δηλαδή} \ \ \sigma(a,0) \leqslant \frac{1}{a_i}. \tag{2.5}$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση βλέπουμε ότι αν το a έχει μια συντεταγμένη $a_i > \frac{1}{\sqrt{2}}$ τότε

$$\sigma(a,0) \leqslant \frac{1}{a_i} < \sqrt{2}. \tag{2.6}$$

Άρα, αυτές οι περιπτώσεις ικανοποιούν το ζητούμενο φράγμα και άρα μπορούμε στο εξής να υποθέτουμε ότι $|a_i| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $S(t) := \sigma(a,t)$. Για κάθε $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{S}(u) &= \int_{\mathbb{R}} \sigma(a,t)e^{-2\pi iut}dt = \int_{Q_n} e^{-2\pi iu\langle x,a\rangle}dx = \int_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n} e^{-2\pi iu\sum a_jx_j}dx \\ &= \prod_{j=1}^{n}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi iux_ja_j}dx_j = \prod_{j=1}^{n}\left[\frac{e^{-2\pi iux_ja_j}}{-2\pi iua_j}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \prod_{j=1}^{n}\frac{\sin(\pi a_ju)}{\pi a_ju}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sigma(a,t) = S(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{S}(u)e^{2\pi iut}du = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin(\pi a_ju)}{\pi a_ju}\,du. \tag{2.7}$$

Είναι $\|a\| = 1$, άρα $a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2 = 1$. Άρα, από την ανισότητα του Holder έχουμε

$$\begin{aligned}S(t) &= \left|\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin(\pi a_ju)}{\pi a_ju}\,du\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{\sin(\pi a_ju)}{\pi a_ju}\right|du \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(\pi a_ju)}{\pi a_ju}\right|^{\frac{1}{a_j^2}}du\right)^{a_j^2}.\end{aligned}$$

Άρα για να αποδείξουμε ότι $\sigma(a,t) = S(t) \leqslant \sqrt{2}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(\pi a_ju)}{\pi a_ju}\right|^{\frac{1}{a_j^2}}du \leqslant \sqrt{2} \tag{2.8}$$

για κάθε j, γιατί τότε θα έχουμε

$$\sigma(a,t) \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(\pi a_ju)}{\pi a_ju}\right|^{\frac{1}{a_j^2}}du\right)^{a_j^2} \leqslant \prod_{j=1}^{n}(\sqrt{2})^{a_j^2} = (\sqrt{2})^{\sum a_j^2} = \sqrt{2}. \tag{2.9}$$

Απομένει λοιπόν να αποδείξουμε την ανισότητα του Ball:

Πρόταση 2.2. *Για κάθε $s \geqslant 2$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right|^{s}dx \leqslant \sqrt{\frac{2}{s}} \tag{2.10}$$

με ισότητα μόνο όταν $s = 2$.

Έχοντας αποδείξει την Πρόταση 2.2 και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = a_j u$ στο ολοκλήρωμα (2.8) παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\pi a_j u)}{\pi a_j u} \right|^{\frac{1}{a_j^2}} du = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right|^{\frac{1}{a_j^2}} a_j dx \leqslant \sqrt{\frac{2}{a_j^2}}\, a_j = \sqrt{2}. \tag{2.11}$$

Απόδειξη της Πρότασης 2.2. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε οφείλεται στους Nazarov και Podkorytov [2]. Βασίζεται σε ένα λήμμα επί των συναρτήσεων κατανομής.

Ορισμός 2.3. Έστω (X, μ) χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Η *συνάρτηση κατανομής* F της f είναι η $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ με

$$F(y) := \mu(\{x \in X : f(x) \geqslant y\}) \tag{2.12}$$

Παρατηρήστε ότι η F είναι φθίνουσα.

Λήμμα 2.4 (Nazarov-Podkorytov)**.** *Έστω f, g μετρήσιμες, μη αρνητικές συναρτήσεις σε έναν χώρο μέτρου (X, μ). Έστω F και G οι συναρτήσεις κατανομής των f και g αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι $F(y)$ και $G(y)$ είναι πεπερασμένες για κάθε $y > 0$ και ότι σε κάποιο σημείο $y_0 \in (0, +\infty)$ η διαφορά $F(y) - G(y)$ αλλάζει πρόσημο από $(-)$ στο $(0, y_0)$ σε $(+)$ στο $(y_0, +\infty)$. Έστω $S = \{s > 0 : f^s - g^s \in L^1(X, \mu)\}$. Τότε η συνάρτηση*

$$\varphi(s) = \frac{1}{s y_0^s} \int_X (f^s - g^s)\, d\mu \tag{2.13}$$

ις είναι αύξουσα στο S. Ειδικότερα, αν για κάποιο $s_0 \in S$ είναι $\varphi(s_0) = 0$, δηλαδή

$$\int_X (f^{s_0} - g^{s_0})\, d\mu = 0, \tag{2.14}$$

τότε

$$\int_X (f^s - g^s)\, d\mu \geqslant 0 \tag{2.15}$$

για κάθε $s > s_0$, με ισότητα μόνο αν $F \equiv G$.

Απόδειξη. **Βήμα 1.** *Αν η διαφορά δύο μη αρνητικών συναρτήσεων f, g είναι ολοκληρώσιμη και οι συναρτήσεις κατανομής F, G είναι πεπερασμένες, τότε*

$$\int_X (f - g)\, d\mu = \int_0^\infty (F(y) - G(y))\, dy. \tag{2.16}$$

Ορίζουμε $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ και $A = \{(x, y) \in X \times (0, \infty) : h(y) \leqslant y < f(x)\}$. Έχουμε $h(x) \leqslant f(x)$ για κάθε $x \in X$, άρα $H(y) \leqslant F(y)$ για κάθε $y > 0$. Άρα, η H

παίρνει πεπερασμένες τιμές. Έχουμε $h \leqslant f$ άρα η $f-h$ είναι μη αρνητική. Επίσης, αφού η $f-g$ είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε ότι η $|f-g|$ είναι ολοκληρώσιμη και $f-h \leqslant |f-g|$ (αν $f(x) \geqslant g(x)$ τότε $h(x) = g(x)$ και $f(x)-h(x) = f(x)-g(x) \leqslant |f(x)-g(x)|$, ενώ αν $f(x) \leqslant g(x)$ τότε $h(x) = f(x)$ και $f(x)-h(x) = 0 \leqslant |f(x)-g(x)|$). Άρα η $f-h$ είναι ολοκληρώσιμη. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Fubini για την χαρακτηριστική συνάρτηση του A έχουμε

$$\int_X \int_0^\infty \chi_A(x,y)\,dy\,d\mu(x) = \int_0^\infty \int_X \chi_A(x,y)\,d\mu(x)\,dy. \tag{2.17}$$

Παρατηρούμε ότι για x σταθερό είναι $\chi_A(x,y) = 1$ αν $y \in [h(x), f(x))$, άρα

$$\int_0^\infty \chi_A(x,y)\,dy = \int_{[h(x),f(x))} dy = f(x) - h(x). \tag{2.18}$$

Για y σταθερό έχουμε $\chi_A(x,y) = 1$ αν $h(x) \leqslant y < f(x)$, άρα

$$\begin{aligned}\int_X \chi_A(x,y)\,d\mu(x) &= \mu(\{x \in X : h(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}) \\ &= \mu(\{x : f(x) > y\}) - \mu(\{x : h(x) > y\}) \\ &= F(y) - H(y).\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$0 \leqslant \int_0^\infty (F(y) - H(y))\,dy = \int_X (f(x) - h(x))\,d\mu(x) < \infty. \tag{2.19}$$

Εντελώς όμοια,

$$0 \leqslant \int_0^\infty (G(y) - H(y))\,dy = \int_X (g(x) - h(x))\,d\mu(x) < \infty. \tag{2.20}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες παίρνουμε την (2.16). □

Βήμα 2. Έστω $s > 0$. Τότε $f^s(x) > y$ αν και μόνο αν $f(x) > y^{1/s}$, άρα η συνάρτηση κατανομής της f^s είναι η $y \mapsto F(y^{1/s})$. Έτσι,

$$\begin{aligned}\int_X (f^s - g^s)\,d\mu &= \int_0^\infty (F(y^{1/s}) - G(y^{1/s}))\,dy = \int_0^\infty st^{s-1}(F(t) - G(t))\,dt \\ &= \int_0^\infty sy^{s-1}(F(y) - G(y))\,dy\end{aligned}$$

(διότι αν θέσουμε $t = y^{1/s}$ τότε $dy = st^{s-1}dt$). Παίρνοντας $s_1, s_2 \in S$ με $s_1 < s_2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi(s_2) - \varphi(s_1) &= \frac{1}{s_2 y_0^{s_2}} \int_X (f^{s_2} - g^{s_2}) d\mu - \frac{1}{s_1 y_0^{s_1}} \int_X (f^{s_1} - g^{s_1}) d\mu \\
&= \frac{s_2}{s_2 y_0^{s_2}} \int_0^\infty y^{s_2-1}(F(y) - G(y))dy - \frac{s_1}{s_1 y_0^{s_1}} \int_0^\infty y^{s_1-1}(F(y) - G(y))dy \\
&= \frac{1}{y_0} \left[\int_0^\infty \left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_2-1} (F(y) - G(y))dy - \int_0^\infty \left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_1-1} (F(y) - G(y))dy \right] \\
&= \frac{1}{y_0} \int_0^\infty \left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_2-1} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_1-1} \right] (F(y) - G(y))dy.
\end{aligned}$$

Παρατηρουμε ότι για κάθε $y > 0$ οι δύο παραστάσεις μέσα στο ολοκλήρωμα έχουν το ίδιο πρόσημο:

- Για $y \in (0, y_0)$ είναι $y/y_0 < 1$, οπότε η συνάρτηση $\left(\frac{y}{y_0}\right)^t$, $t \in \mathbb{R}$, είναι φθίνουσα, άρα $\left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_2-1} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_1-1} \leqslant 0$ αφού $s_2 - 1 \geqslant s_1 - 1$. Επίσης, ξέρουμε ότι $F(y) - G(y) \leqslant 0$ από τα δεδομένα.
- Για $y \in (y_0, +\infty)$ είναι $y/y_0 > 1$, οπότε η συνάρτηση $\left(\frac{y}{y_0}\right)^t$, $t \in \mathbb{R}$, θα είναι αύξουσα, άρα $\left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_2-1} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{s_1-1} \geqslant 0$ αφού $s_2 - 1 \geqslant s_1 - 1$. Επίσης, ξέρουμε ότι $F(y) - G(y) \geqslant 0$.

Άρα πράγματι οι παραστάσεις έχουν το ίδιο πρόσημο, άρα το ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικό, άρα $\varphi(s_2) - \varphi(s_1) \geqslant 0$, δηλαδή η φ είναι αύξουσα στο S. $\square$

Τώρα θα αποδείξουμε την ανισότητα του Ball:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right|^s dx \leqslant \sqrt{\frac{2}{s}}, \qquad s > 2. \tag{2.21}$$

Θέλουμε να γράψουμε το $\sqrt{\frac{2}{s}}$ σε μορφή $\int_{\mathbb{R}} f^s(x)dx$ για κάποια f. Έχουμε το ολοκλήρωμα Euler-Poisson

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1 \tag{2.22}$$

και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{\frac{2}{s}}x$ (οπότε $dy = \sqrt{\frac{2}{s}}dx$) έχουμε

$$\sqrt{\frac{2}{s}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\frac{\pi y^2}{2}}\right)^s dy. \tag{2.23}$$

Θέτουμε λοιπόν $f(x) = e^{-\pi x^2}$ και $g(x) = \left|\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right|$, και η ανισότητα του Ball γίνεται

$$\int_0^\infty f^s > \int_0^\infty g^s, \qquad s > 2. \tag{2.24}$$

Έχουμε ότι για $s = 2$ ισχύει η ισότητα, άρα αρκεί να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 2.4 για να έχουμε το ζητούμενο. Στο Λήμμα θέτουμε f, g όπως ορίστηκαν εδώ, και

$$X = (0, \infty) \tag{2.25}$$

γιατί οι f, g είναι άρτιες. Αρκεί να δείξουμε για τις συναρτήσεις κατανομής F, G ότι είναι πεπερασμένες για κάθε $y > 0$ και ότι σε κάποιο σημείο η διαφορά $F - G$ αλλάζει πρόσημο από πλην σε συν.

Παρατηρούμε ότι $0 < f, g < 1$, άρα $F(y) = G(y) = 0$ για κάθε $y \geqslant 1$. Εξετάζουμε λοιπόν μόνο τις τιμές $y \in (0, 1)$.

Η f είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα $F(y) = f^{-1}(y)$ και αφού $f(x) = e^{-\pi x^2}$ παίρνουμε

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{y}}. \tag{2.26}$$

Άρα έχουμε

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{y}} < +\infty \tag{2.27}$$

για κάθε $y \in (0, 1)$.

Για την $G(y)$ έχουμε ότι $g(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τις $y_m = \max_{[m,m+1]}(g)$, τα (τοπικά) μέγιστα της g ανάμεσα σε διαδοχικούς φυσικούς. Στο διάστημα $[m.m+1]$, η g μεγιστοποιείται στο $\left(m, m+\frac{1}{2}\right)$. Πράγματι, $g(m) = g(m+1) = 0$. Η g είναι φθίνουσα στο $\left(m+\frac{1}{2}, m+1\right)$, αφού και η $|\sin px|$ και η $\frac{1}{|\pi x|}$ είναι φθίνουσες εκεί, και $g'(x) = \frac{|\sin px|' \pi x - \pi |\sin \pi x|}{(\pi x)^2}$, άρα $g'\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} < 0$. Άρα, το μέγιστο της g βρίσκεται στο $\left(m, m+\frac{1}{2}\right)$, άρα

$$y_m > g\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}. \tag{2.28}$$

Για $x \geqslant 1$ έχουμε $g(x) \leqslant \frac{1}{\pi x}$, άρα αν $x \in [m, m+1]$ τότε $g(x) \leqslant \frac{1}{\pi x} \leqslant \frac{1}{\pi m}$, άρα $y_m < \frac{1}{\pi m}$. Δηλαδή έχουμε για τα y_m:

$$\frac{1}{\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)} < y_m < \frac{1}{\pi m}. \tag{2.29}$$

Από την $y_m < \frac{1}{\pi m}$ συμπεραίνουμε ότι $y_m \to 0$ όταν $m \to \infty$.

Έστω τώρα $y \in (0,1)$. Τότε ισχύει ότι $G(y) < +\infty$. Πράγματι, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_m < y$ για κάθε $m \geqslant n_0$. Τότε, για κάθε $x \geqslant m$ είναι $g(x) \leqslant y_m < y$, άρα $G(y) < m < +\infty$. Άρα και η $G(y)$ είναι πεπερασμένη για κάθε y.

Θα δείξουμε ότι η $F - G$ αλλάζει πρόσημο. Για $x \in (0,1)$ έχουμε

$$g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} e^{-x^2/k^2} = e^{-(\pi x)^2/6} < e^{-\pi x^2/2} = f(x). \tag{2.30}$$

Επομένως, για κάθε $y \in (y_1, 1)$,

$$G(y) = \mu(\{x \in (0,1) : g(x) > y\}) < \mu(\{x \in (0,1) : f(x) > y\}) \leqslant F(y). \tag{2.31}$$

Δηλαδή η διαφορά $F - G$ είναι θετική στο διάστημα $(y_1, 1)$.

Ξέρουμε ότι $\int_0^\infty (f^2(x) - g^2(x))\, dx = 0$. Από το Βήμα 2 του Λήμματος,

$$\int_0^\infty 2y(F(y) - G(y))\, dy = \int_0^\infty (f(x)^2 - g(x)^2)\, dx = 0. \tag{2.32}$$

Αν η $F - G$ ήταν θετική σε όλο το $(0, +\infty)$ τότε το ολοκλήρωμα αυτό θα έπρεπε να είναι θετικό, άτοπο. Άρα η διαφορά $F - G$ αλλάζει πρόσημο τουλάχιστον μία φορά στο διάστημα $(0, y_1)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η $F - G$ αλλάζει πρόσημο μόνο μια φορά. Για να το κάνουμε αυτό θα αποδείξουμε ότι η $F - G$ είναι αύξουσα στο $(0, y_1)$. Ισοδύναμα ότι $F'(y) > G'(y)$ για κάθε $y \in (0, y_1)$. Οι F, G ως συναρτήσεις κατανομής είναι φθίνουσες, άρα $F', G' \leqslant 0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $|G'(y)| > |F'(y)|$.

Θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε την $|G'(y)|$. Έστω $y \in (0, y_1)$, $y \neq y_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned} |G(y+h) - G(y)| &= \mu(\{x \in 0, +\infty) : \text{ το } g(x) \text{ είναι μεταξύ των } y \text{ και } y+h\}) \\ &= \mu(g^{-1}([y, y+h))). \end{aligned}$$

Η g παίρνει την τιμή y σε πολλά σημεία: θέτουμε $A = \{x \in (0, +\infty) : g(x) = y\}$. Μπορούμε να πάρουμε το $|h|$ αρκετά μικρό ώστε το $g^{-1}(y+h)$ να βρίσκεται κοντά στα $g^{-1}(y)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(g^{-1}([y, y+h))) &= \sum_{x \in A} \ell(g^{-1}(g(x)), g^{-1}(g(x)+h)) \\ &= \sum_{x \in A} |g^{-1}(g(x)+h) - g^{-1}(g(x))|. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \left|\frac{G(y+h) - G(y)}{h}\right| &= \sum_{x \in A} \left|\frac{g^{-1}(g(x)+h) - g^{-1}(g(x))}{h}\right| \\ &\to \sum_{x \in A} |(g^{-1})'(g(x))| = \sum_{x \in A} \frac{1}{|g'(x)|}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, για $y \in (0, y_1)$ με $y \neq y_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$|G'(y)| = \sum_{x>0, g(x)=y} \frac{1}{|g'(x)|}. \tag{2.33}$$

Τώρα θα βρούμε άνω εκτιμήσεις για την $|g'(x)|$, οι οποίες θα μας δώσουν κάτω εκτιμήσεις για την $|G'(y)|$. Έστω $y \in (y_m, y_{m+1})$. Η εξίσωση $g(x) = y$ έχει μία λύση στο $(0, 1)$ και δύο λύσεις σε κάθε διάστημα $(k, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Αν x είναι η ρίζα στο $(0, 1)$, τότε

$$|g'(x)| = \frac{\sin \pi x - \pi x \cos \pi x}{\pi x^2} = \frac{1}{\pi x^2} \int_0^{\pi x} t \sin t \, dt \leqslant \frac{1}{\pi x^2} \int_0^{\pi x} t \, dt = \frac{\pi}{2}. \tag{2.34}$$

Αν η ρίζα $x \in (k, k+1)$, $k \geqslant 1$, τότε

$$|g'(x)| = \left| \frac{\cos \pi x}{x} - \frac{\sin \pi x}{\pi x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x} \left(1 + \frac{|\sin \pi(x-k)|}{\pi x} \right) \leqslant \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\pi(x-k)}{\pi k} \right) = \frac{1}{k}. \tag{2.35}$$

Έτσι, για κάθε $y \in (y_{m+1}, y_m)$ έχουμε

$$|G'(y)| \geqslant \frac{2}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{m} k = \frac{2}{\pi} + m + m^2. \tag{2.36}$$

Έχουμε βρεί ότι $F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \log \frac{1}{y}}$. Άρα,

$$F'(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{y} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{y}} \cdot (-1) \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y \sqrt{2\pi \ln \frac{1}{y}}}. \tag{2.37}$$

Άρα,

$$\left| \frac{G'(y)}{F'(y)} \right| = |G'(y)| y \sqrt{2\pi \log \frac{1}{y}} \geqslant \Big(\frac{2}{\pi} + m + m^2 \Big) y \sqrt{2\pi \log \frac{1}{y}}. \tag{2.38}$$

Για $y \in (0, y_1)$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y \mapsto y = \sqrt{2\pi \log \frac{1}{y}}$ είναι αύξουσα στο $(0, y_1)$ διότι $y_1 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{e}}$. Υπενθυμίζουμε ότι $y > y_{m+1} > \frac{1}{\pi(m+\frac{3}{2})}$, άρα

$$\left| \frac{G'(y)}{F'(y)} \right| = |G'(y)| > \frac{\frac{2}{\pi} + m + m^2}{\frac{3}{2} + m} \sqrt{\frac{2}{\pi} \log \pi(m + \tfrac{3}{2})} > \sqrt{\frac{2}{\pi} \log \frac{5\pi}{2}}, \tag{2.39}$$

διότι $m \geqslant 1$ και $\frac{2}{\pi} + m^2 > \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Το δεξί μέλος της ανισότητας είναι μεγαλύτερο από 1 αν και μόνο αν $\ln \frac{5\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$. Για την $\ln$ ισχύει ότι $\ln(5x) > x$ για $x \in [1, 2]$. Πράγματι, η $\ln$ είναι κοίλη, $\ln(5 \cdot 1) = \ln 5 > \ln e = 1$

και $\ln(10) > \ln(e^2) = 2$, άρα $\ln(5x) > x$ για κάθε $x \in [1,2]$. Αφού $\frac{\pi}{2} \in [1,2]$ έχουμε $\sqrt{\frac{2}{\pi}\ln\left(5\frac{\pi}{2}\right)} > 1$, άρα $\left|\frac{G'(y)}{F'(y)|}\right| > 1$. Άρα $|G'(y)| > |F'(y)|$, άρα πράγματι η $F - G$ είναι αύξουσα στο $(0, y_1)$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Λήμματος 2.4 για τις F, G, και αφού $\int_0^\infty f^2 = \int_0^\infty g^2$, έχουμε

(2.40) $$\int_0^\infty f^s > \int_0^\infty g^s, \qquad \text{για κάθε } s > 2,$$

δηλαδή ισχύει η ανισότητα του Ball. □

Αναφορές

[1] K. M. Ball, *Cube slicing in* $\mathbb{R}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 465-473.

[2] F. L. Nazarov and A. N. Podkorytov, *Ball, Haagerup, and distribution functions*, in Complex analysis, operators, and related topics, Oper. Theory Adv. Appl. **113**, Birkhauser, Basel (2000), 247-267.