Το θεώρημα του Muntz

Αλέξανδρος Βλάνδος, Χάρις Γανωτάκη, Ιάσων Ψωμάς

Περίληψη

Το θεώρημα του Muntz μας λέει ότι ο υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο των συναρτήσεων $\{1, x^{p_1}, x^{p_2}, \dots\}$, όπου $1 \leqslant p_n \to \infty$, είναι πυκνός στον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Παρουσιάζουμε την απόδειξη του Muntz και συζητάμε άλλες αποδείξεις και επεκτάσεις του θεωρήματος.

1 Εισαγωγή

Ένα υποσύνολο S ενός χώρου με νόρμα X λέγεται *ολικό* αν το σύνολο των (πεπερασμένων) γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S είναι πυκνό στον X. Δηλαδή, αν για κάθε $f \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $g_1, \dots, g_m \in S$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i \right\| < \varepsilon.$$

Με αυτήν την ορολογία, το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass ισχυρίζεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{1, x, x^2, \dots\}$$

είναι ολικό στον $C[0,1]$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι να δοθούν κι άλλα παραδείγματα ολικών υποσυνόλων του $C[0,1]$. Ειδικότερα, να χαρακτηριστούν τα υποσύνολα του $\mathcal{P}$ που είναι ολικά.

Το ερώτημα αυτό τέθηκε από τον S. N. Bernstein το 1912. Συγκεκριμένα, ρώτησε ποιές είναι οι συνθήκες για μια αύξουσα ακολουθία $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$ που εξασφαλίζουν ότι ο υπόχωρος

$$\mathrm{span}\{x^{p_i} : i = 0, 1, 2, \dots\}$$

που παράγεται από τα μονώνυμα x^{p_i} είναι πυκνός στον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Απέδειξε μάλιστα ότι η συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \log p_i}{p_i} = +\infty$$

είναι αναγκαία, και η συνθήκη

$$\lim_{i\to\infty}\frac{p_i}{i\log i}=0$$

είναι ικανή, και έκανε την εικασία ότι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι η

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}=+\infty.$$

Η εικασία είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα γιατί αποκαλύπτει μια σχέση ανάμεσα σε δύο, κατ¨ αρχήν, ανόμοια γνωστά μας αποτελέσματα: το γεγονός ότι το $\mathcal{P}=\{1,x,x^2,\ldots\}$ είναι ολικό στον $C[0,1]$ και το γεγονός ότι η αρμονική σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ αποκλίνει!

Ο Muntz έλυσε το πρόβλημα, το 1914, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των οριζουσών Gram για να υπολογίσει την απόσταση της x^m από τον υπόχωρο $\mathrm{span}\{1,x^{p_1},\ldots,x^{p_n}\}$ ως προς την «τετραγωνική νόρμα»

$$\|f\|_2=\left(\int_0^1|f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Οι ορίζουσες που προκύπτουν είναι της μορφής

$$\det\big(1/(1+a_i+a_j)\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n},$$

και μια ακριβής έκφραση γι¨ αυτές είχε δοθεί στον 19ο αιώνα από τον Cauchy. Η ακριβής διατύπωση του *δεύτερου θεωρήματος του Muntz* είναι η εξής:

Θεώρημα 1.1. *Έστω το σύνολο των συναρτήσεων $\{x^{p_1},x^{p_2},\ldots\}$ όπου $-\frac{1}{2}<p_n\to\infty$. Το σύνολο αυτό είναι ολικό ως προς την $\|\cdot\|_2$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν*

$$\sum_{p_n\neq 0}\frac{1}{p_n}=+\infty.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για την τετραγωνική νόρμα, ο Muntz απέδειξε το *πρώτο του θεώρημα* για την ομοιόμορφη νόρμα:

Θεώρημα 1.2. *Το σύνολο των συναρτήσεων $\{1,x^{p_1},x^{p_2},\ldots\}$, όπου $1\leqslant p_n\to\infty$, είναι ολικό ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=+\infty.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Muntz, για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 χρησιμοποίησε το θεώρημα του Fejér για την Cesàro αθροισιμότητα σειρών Fourier, και το επιχείρημά του ήταν μάλλον πολύπλοκο. Η απλή απόδειξη που δίνουμε εδώ (με αναγωγή του Θεωρήματος 1.2 στο Θεώρημα 1.1) οφείλεται στον Szász, ο οποίος το 1916 ασχολήθηκε με επεκτάσεις του θεωρήματος στις οποίες θεωρούσε κάποιες ειδικές ακολουθίες μιγαδικών εκθετών p_i.

Όπως είναι φυσικό, υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους θα μπορούσε κανείς να γενικεύσει το πρόβλημα: αντί για τον χώρο $C[0,1]$ θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει άλλους χώρους συναρτήσεων, όπως ο $L^p(a,b)$, ή να θεωρήσει το αντίστοιχο πρόβλημα για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ή μιγαδικές συναρτήσεις, για συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα που δεν περιέχει το 0, για πιο γενικές ακολουθίες εκθετών, για πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές, κλπ.

2 Βέλτιστη τετραγωνική προσέγγιση

Λήμμα 2.1. *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, \dots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. Η απεικόνιση*

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \Big\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \Big\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο

$$(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle).$$

Δηλαδή, το $y_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$ είναι το πλησιέστερο προς το x στοιχείο του υποχώρου $F = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$.

Επιπλέον, το $x - y_0$ είναι κάθετο στον F, και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$ τότε $y = y_0$.

Απόδειξη. Για την καθετότητα: Κάθε $y \in F$ γράφεται στη μορφή $y = \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j \rangle e_j$. Έχουμε $x - y \perp F$ αν και μόνο αν $\langle x - y, e_j \rangle = 0$, δηλαδή

$$\langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$$

για κάθε $j = 1, \dots, n$. Δηλαδή, αν $y = y_0$.

Για το ολικό ελάχιτο: Για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, γράφοντας

$$\begin{aligned} x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j &= x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j + \sum_{j=1}^{n} (\langle x, e_j \rangle - \lambda_j) e_j \\ &= z + y_1, \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_j \rangle = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$) και $y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\|y_1 + z\|^2 = \|y_1\|^2 + \|z\|^2,$$

δηλαδή

$$\Big\|x-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\Big\|^2 = \Big\|x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\Big\|^2 + \Big\|\sum_{j=1}^{n}(\langle x,e_j\rangle-\lambda_j)e_j\Big\|^2$$
$$= \Big\|x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\Big\|^2 + \sum_{j=1}^{n}|\langle x,e_j\rangle-\lambda_j|^2.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος έχει ολικό ελάχιστο όταν $\lambda_j = \langle x, e_j\rangle$, $j = 1,\dots,n$. □

3 Το δεύτερο θεώρημα του Muntz

Θεώρημα 3.1. *Έστω το σύνολο των συναρτήσεων $\{x^{p_1}, x^{p_2}, \dots\}$ όπου $-\frac{1}{2} < p_n \to \infty$. Το σύνολο αυτό είναι ολικό ως προς την $\|\cdot\|_2$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν*

$$\sum_{p_n\neq 0}\frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 3.2 (Gram)**.** *Έστω M ένας n-διάστατος υπόχωρος ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο. Η απόσταση d τυχόντος σημείου g από τον M δίνεται από τον τύπο*

$$d^2 = \frac{G(f_1,\dots,f_n,g)}{G(f_1,\dots,f_n)},$$

όπου $\{f_1,\dots,f_n\}$ είναι μια βάση του M, και

$$G(f_1,\dots,f_n) = \begin{vmatrix} \langle f_1,f_1\rangle & \cdots & \langle f_1,f_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_n,f_1\rangle & \cdots & \langle f_n,f_n\rangle \end{vmatrix}.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα βέλτιστης προσέγγισης έχουμε ότι υπάρχει $f^* \in M$ τέτοιο ώστε η $\|f^*-g\|$ να είναι ελάχιστη. Ισχύει επίσης ότι $f^*-g \perp M$ και

$$f^* = \sum_{i=1}^{n}\langle g, f_i\rangle f_i.$$

Θέτουμε

$$\lambda_j = \langle g, f_j\rangle, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Παίρνουμε λοιπόν το σύστημα

$$\langle f^*-g, f_i\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j - g, f_i\Big\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j, f_i\Big\rangle - \langle g, f_i\rangle = 0, \qquad i = 1,\dots,n,$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle f_j, f_i \rangle = \langle g, f_i \rangle, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Εφόσον το σύστημα των εξισώσεων έχει μοναδική λύση, η ορίζουσα $G(f_1, \dots, f_n)$ είναι μη μηδενική.

Από τις σχέσεις ορθογωνιότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned} d^2 &= \|g - f^*\|^2 = \langle g - f^*, g - f^* \rangle = \langle g, g \rangle - \langle g, f^* \rangle - \langle f^*, g - f^* \rangle \\ &= \langle g, g \rangle - \langle g, f^* \rangle, \end{aligned}$$

διότι $\langle f^*, g - f^* \rangle = 0$, αφού $f^* \in M$ και $g - f^* \perp M$. Έπεται ότι

$$\left\langle g, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \right\rangle = \langle g, f^* \rangle + d^2 = \langle g, g \rangle,$$

και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα και την συμμετρική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle f_j, g \rangle + d^2 = \langle g, g \rangle. \tag{3.2}$$

Από τις (3.1) και (3.2) παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle f_1, f_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle f_n, f_1 \rangle + 0 \cdot d^2 &= \langle g, f_1 \rangle \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \qquad \vdots \\ \lambda_1 \langle f_1, f_n \rangle + \cdots + \lambda_n \langle f_n, f_n \rangle + 0 \cdot d^2 &= \langle g, f_n \rangle \\ \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \cdots + \lambda_n \langle f_n, g \rangle + d^2 &= \langle g, g \rangle. \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα $(n+1)$ εξισώσεων με $(n+1)$ αγνώστους, η λύση του οποίου δίνεται από την ορίζουσα Gram:

$$d^2 = \frac{G(f_1, \dots, f_n, g)}{G(f_1, \dots, f_n)}.$$

□

Λήμμα 3.3 (Cauchy). *Ισχύει η ταυτότητα*

$$\prod_{(i,j)} (a_i + b_j) \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \prod_{j<i} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Απόδειξη. Στο αριστερό μέλος έχουμε μια ρητή συνάρτηση των a_i, b_i ($i = 1, \ldots, n$) η οποία δεν έχει πόλους εξαιτίας της παράστασης $(a_i + b_j)$ που βρίσκεται έξω από την ορίζουσα. Άρα και τα δύο μέλη της ισότητας είναι πολυώνυμα.

Αν το δεξί μηδενίζεται, τότε θα έχουμε $a_i = a_j$ ή $b_i = b_j$ για κάποια $i \neq j$. Τότε όμως θα μηδενιστεί και το αριστερό μέλος, άρα συμπεραίνουμε ότι το δεξί μέλος είναι παράγοντας του αριστερού. Αλλά και τα δύο μέλη είναι του ίδιου βαθμού, επομένως το αριστερό μέλος είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του δεξιού. Το ότι ο σταθερός τους λόγος είναι ίσος με 1, δείχνεται αν πάρουμε όρια καθώς $b_1 \to a_1$, $b_2 \to a_2$ κλπ. Αν γράψουμε πρώτα το αριστερό μέλος στη μορφή

$$\prod_{i\neq j}(a_i + b_j)\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1+b_1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{a_1+b_1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_n+b_n}{a_n+b_1} & \frac{a_n+b_n}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

τότε η οριακή τιμή του αριστερού μέλους είναι

$$\prod_{i\neq j}(a_i - a_j),$$

που είναι και η οριακή τιμή του δεξιού μέλους. □

Λήμμα 3.4. *Έστω $0 < a_n \neq 1$ και $a_n \to 0$. Τότε,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Απόδειξη. Έστω $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_n < \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geqslant m$. Γι¨ αυτούς τους φυσικούς n έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{\log(1-a_n)}{a_n} + 1\right| &= \left|\frac{-a_n - a_n^2/2 - a_n^3/3 - \cdots}{a_n} + 1\right| \\ &= \left|\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} + \frac{a_n^3}{4} + \cdots\right| < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα, για $n \geqslant m$ έχουμε

$$-\frac{3}{2} \leqslant a_n^{-1}\log(1-a_n) < -\frac{1}{2}$$

και έπεται ότι οι δύο σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-a_n) \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Ισοδύναμα, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-a_n) = \log\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)\right) = -\infty,$$

το οποίο συμβαίνει ακριβώς όταν $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)=0$. $\square$

Λήμμα 3.5. *Έστω $m, p_1, p_2, \ldots, p_n$ διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί, μεγαλύτεροι του $-\frac{1}{2}$. Η τετραγωνική απόσταση της x^m από τον υπόχωρο που παράγει το $\{x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots x^{p_n}\}$ στον $C[0,1]$ είναι*

$$d = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{j=1}^{n} \frac{|m-p_j|}{m+p_j+1}.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα Gram έχουμε

$$d^2 = \frac{G(x^{p_1}, \ldots, x^{p_n}, x^m)}{G(x^{p_1}, \ldots, x^{p_n})}.$$

Επειδή $\langle x^p, x^q \rangle = (p+q+1)^{-1}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Cauchy για να υπολογίσουμε την $G(x^{p_1}, \ldots, x^{p_n})$ στη μορφή

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p_1+p_1+1} & \cdots & \frac{1}{p_1+p_n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{p_n+p_1+1} & \cdots & \frac{1}{p_n+p_n+1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{j<i}(p_i-p_j)^2}{\prod_{(i,j)(p_i+p_j+1)}}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε και την $G(x^{p_1}, \ldots, x^{p_n}, x^m)$ με παρόμοιο τρόπο, και βλέπουμε ότι είναι ίση με

$$\frac{\prod_{j<i}(p_i-p_j)^2 \prod_{j=1}^{n}(m-p_j)^2}{(2m+1)\prod_{(i,j)}(p_i+p_j+1)\prod_{j=1}^{n}(m+p_j+1)^2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος του Muntz. Επειδή το σύνολο των πολυωνύμων είναι πυκνό, αρκεί να βρούμε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε κάθε μονώνυμο x^m να προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{p_i}$.

Από το Λήμμα 3.5 η απόσταση της x^m από τον $\mathrm{span}\{x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots x^{p_n}\}$ στον $C[0,1]$ είναι

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{m-p_j}{m+p_j+1} \right|.$$

Παρατηρούμε ότι $d_n \searrow 0$ αν και μόνο αν

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left| \frac{m-p_j}{m+p_j+1} \right| = \prod_{j=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{2m+1}{m+p_j+1} \right| = 0.$$

Από το Λήμμα 3.4 αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2m+1}{m+p_j+1} = \infty.$$

Η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με την

$$\sum_{p_j \neq 0} \frac{1}{p_j} = +\infty,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

4 Το πρώτο θεώρημα του Muntz

Θεώρημα 4.1. *Το σύνολο των συναρτήσεων* $\{1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots\}$, *όπου* $1 \leqslant p_n \to \infty$, *είναι ολικό ως προς την* $\|\cdot\|_\infty$ *στο* $[0,1]$ *αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz γνωρίζουμε ότι σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|,$$

όπου $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$. Θεωρώντας τον $C[0,1]$ με το εσωτερικό γινόμενο που επάγεται από το ολοκλήρωμα, και παίρνοντας $g(x) \equiv 1$, έχουμε

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Άρα, για κάθε $x \in [0,1]$ κα για κάθε ακέραιο $m \geqslant 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \left| x^m - \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{p_i} \right| &= \left| \int_0^x \left(m t^{m-1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i t^{p_i - 1} \right) dt \right| \\ &\leqslant \int_0^x \left| m t^{m-1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i t^{p_i-1} \right| dt \\ &\leqslant \int_0^1 \left| m t^{m-1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i t^{p_i-1} \right| dt \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \left| m t^{m-1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i t^{p_i-1} \right|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από το δεύτερο θεώρημα του Muntz, μπορούμε να επιλέξουμε m και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ώστε

$$\left(\int_0^1 \left| mt^{m-1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i t^{p_i - 1} \right|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Αφού το $x \in [0,1]$ στην (4.1) ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\left\| x^m - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{p_i} \right\|_\infty < \varepsilon.$$

Η περίπτωση $m = 0$ είναι τετριμμένη. Αφού κάθε στοιχείο x^m του $\mathcal{P}$ προσεγγίζεται από γραμμικό συνδυασμό στοιχείων του $\{1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots\}$ ως προς την $\| \cdot \|_\infty$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Weierstrass συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε $f \in C[0,1]$. Έτσι έχουμε αποδείξει τη μία κατεύθυνση της ισοδυναμίας.

Για την άλλη κατεύθυνση παρατηρούμε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < +\infty$$

τότε κάποια $f \in C[0,1]$ *δεν* προσεγγίζεται «αυθαίρετα καλά» από συναρτήσεις της μορφής $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{p_i}$ ως προς την $\| \cdot \|_2$: δηλαδή, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε, για κάθε n και για κάθε επιλογή συντελεστών $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ισχύει

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^{p_i} \right|^2 dx \geqslant \varepsilon^2.$$

Αφού $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $g \in C[0,1]$, συμπεραίνουμε ότι, ια κάθε n και για κάθε επιλογή συντελεστών $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ισχύει

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^{p_i} \right\|_\infty \geqslant \varepsilon.$$

Δηλαδή, το $\{1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots\}$ δεν είναι ολικό στον $(C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$. □

5 Μια κατασκευαστική απόδειξη του von Golitscek

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε μια άλλη απόδειξη για το γεγονός ότι η συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$$

είναι ικανή στο Θεώρημα 1.2, αν υποθέσουμε ότι $p_i \to \infty$. Η απόδειξη αυτή οφείλεται στον von Golitschek και είναι κατασκευαστική, και ταυτόχρονα πολύ σύντομη.

Η ιδέα είναι να ορίσουμε, για κάθε m, μια συγκεκριμένη ακολουθία $(P_n)_n$ προσεγγίσεων της x^m και να αποδείξουμε ότι $\|Q_n\|_\infty \to 0$, όπου $Q_n(x) = x^m - P_n(x)$. Θέτουμε $Q_0(x) = x^m$, και για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, αν ήδη γνωρίζουμε ότι

$$Q_{n-1}(x) = x^m - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n-1} x^{p_i}$$

για κάποιους συντελεστές $\lambda_{i,n-1}$, ορίζουμε

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= (p_n - m)x^{p_m} \int_x^1 q_{n-1}(t) t^{-(1+p_n)} dt \\
&= (p_n - m)x^{p_n} \int_x^1 \left(t^m - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n-1} t^{p_i} \right) t^{-(1+p_n)} dt \\
&= (p_n - m)x^{p_n} \int_x^1 \left(t^{m-(1+p_n)} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n-1} t^{p_i-(1+p_n)} \right) dt \\
&= (p_n - m)x^{p_n} \left[\frac{t^{m-p_n}}{m - p_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n-1} \frac{t^{p_i-p_n}}{(p_i - p_n)} \right]_x^1 \\
&=: x^m - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} x^{p_i},
\end{aligned}$$

και μετά,

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} x^{p_i}.$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι $\|Q_0\|_\infty = 1$. Για κάθε $n \geqslant 1$, χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα

$$px^p(1-x) < 1$$

που ισχύει για κάθε $x \in (0,1)$ και $p > 0$, βλέπουμε ότι

$$\|Q_n\| \leqslant \left| 1 - \frac{m}{p_n} \right| \|Q_{n-1}\|_\infty.$$

Συνεπώς,

$$\|Q_n\|_\infty \leqslant \prod_{i=0}^{n} \left| 1 - \frac{m}{p_i} \right|,$$

και η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$, λόγω των υποθέσεων για τους p_i.

6 Μετροθεωρητική μορφή του θεωρήματος του Muntz

Το θεώρημα του Muntz μπορεί να διατυπωθεί σε μετροθεωρητική γλώσσα. Υποέτουμε ότι $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών και, για να αποφύγουμε κάποια τεχνικά προβλήματα με το 0, υποθέτουμε εδώ ότι οι συναρτήσεις που θέλουμε να προσεγγίσουμε μηδενίζονται στο 0. Σε αυτήν την περίπτωση το θεώρημα του Muntz μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 6.1. *Ο χώρος* $\mathrm{span}\{x^{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$ *είναι πυκνός στον* $C_0[0,1] = C[0,1] \cap \{f : f(0) = 0\}$ *αν και μόνο αν* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$.

Όταν προσπαθούμε να δείξουμε ότι κάποιος υπόχωρος ενός χώρου Banach είναι πυκνός, πολύ συχνά χρησιμοποιούμε το θεώρημα Hahn-Banach με τον εξής τρόπο: *αν Y είναι ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Banach X, τότε $Y \neq X$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $L \in X^*$ τέτοιο ώστε $L \neq 0$ και $L \mid_Y \equiv 0$.*

Έτσι, παίρνοντας $X = C_0[0,1]$ και $Y = \overline{\mathrm{span}}\{x^{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$, θα έχουμε ότι ο $\overline{\mathrm{span}}\{x^{p_i} : i \in \mathbb{N}\}$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $C_0[0,1]$ αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο $L \in (C_0[0,1])^* \setminus \{0\}$ με την ιδιότητα

$$L(x^{p_i}) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, ο δυϊκός χώρος του $C_0[0,1]$ χαρακτηρίζεται ως εξής: $L \in (C_0[0,1])^*$ αν και μονο αν υπάρχει προσημασμένο πεπερασμένο Borel μέτρο μ στο $(0,1]$, τέτοιο ώστε

$$L(f) = \int_0^1 f(t)\, d\mu(t). \tag{6.1}$$

Επιπλέον, από το θεώρημα του Weiertstrass γνωρίζουμε ότι τα αλγεβρικά πολυώνυμα που μηδενίζονται στο 0 σχηματίζουν πυκνό υπόχωρο του $C_0[0,1]$. Άρα, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 6.1 ως εξής:

Θεώρημα 6.2 (Feller)**.** *Έστω $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ μια αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Για κάθε προσημασμένο πεπερασμένο Borel μέτρο μ με φορέα το $(0,1]$, θεωρούμε την συνάρτηση*

$$f(z) := \int_0^1 t^z d\mu(t). \tag{6.2}$$

Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$.

(β) *Υπάρχει μη-μηδενικό προσημασμένο πεπερασμένο Borel μέτρο μ στο $(0,1]$ τέτοιο ώστε $f(p_i) = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$.*

Θα περιγράψουμε την απόδειξη της συνεπαγωγής (α) $\implies$ (β). Για δοθέν μέτρο μ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = e^{-s}$ που μετασχηματίζει το διάστημα $(0, 1]$ στην ημιευθεία $[0, \infty)$, το μέτρο μ σε ένα άλλο μέτρο ν στο $[0, \infty)$, και την (6.2) στην

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zs} d\nu(s). \tag{6.3}$$

Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε, με την υπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη (α), ότι υπάρχει προσημασμένο πεπερασμένο Borel μέτρο ν στο $[0, \infty)$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση f που ορίζεται από την (6.3) να μην μηδενίζεται ταυτοτικά, αλλά να ικανοποιεί την $f(p_i) = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$. Δίνουμε μια απόδειξη στην οποία η σειρά αντιστρέφεται: πρώτα ορίζουμε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την $f(p_i) = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$, και μετά αποδεικνύουμε ότι αυτή η συνάρτηση αναπαρίσταται στη μορφή (6.3).

Θεωρούμε $\eta > 0$ και ορίζουμε

$$f(t) := \frac{1}{(1 + \eta + t)^2} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i - t}{p_i + 2\eta + t}.$$

Από την συνθήκη (α) εξασφαλίζεται η σύγκλιση του απειρογινομένου μέσω του οποίου ορίζεται η f. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και απόλυτη στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C} \setminus \{-p_i - 2\eta\}_{i=1}^{\infty}$. Ειδικότερα, η f ορίζεται καλά στο $[0, \infty)$ και μηδενίζεται στα p_i, $i \geqslant 1$.

Ορίζουμε

$$f_0(t) := \frac{1}{(1 + \eta + t)^2}$$

και

$$f_i(t) := \frac{p_i - t}{p_i + 2\eta + t} f_{i-1}(t), \qquad i = 1, 2, \dots$$

Παρατηρούμε ότι

$$f_0(t) = \int_0^\infty s e^{-(1+t+\eta)s} ds = \int_0^\infty e^{-ts} u_0(s) ds,$$

όπου $u_0(s) := s e^{-(1+\eta)s}$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $i < n$, η συνάρτηση f_i γράφεται στη μορφή

$$f_i(t) = \int_0^\infty e^{-ts} u_i(s) ds$$

για κάποια u_i με $u_i(0) = 0$ (κάτι που ισχύει για $i = 0$). Θα αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για $k = n$. Από τον ορισμό της f_n έχουμε

$$f_n(t) = \frac{p_n - t}{p_n + 2\eta + t} f_{n-1}(t) = \frac{p_n - t}{p_n + 2\eta + t} \int_0^\infty e^{-ts} u_{n-1}(s) ds,$$

και με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$t f_{n-1}(t) = \int_0^\infty e^{-ts} u'_{n-1}(s) ds,$$

και
$$f_n(t) = \int_0^\infty e^{-ts} u_n(s) ds,$$
όπου u_n είναι η λύση της εξίσωσης

$$u_n' + u_{n1}' = p_n u_{n-1} - (p_n + 2\eta) u_n \tag{6.4}$$

με $u_n(0) = 0$. Επιπλέον, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η λύση u_n ικανοποιεί την $\lim_{t\to\infty} u_n(t) = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (6.4) με $(u_n + u_{n-1})$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[(u_n + u_{n-1})^2]' &= (u_n' + u_{n-1}')(u_n + u_{n-1}) \\
&= (u_n + u_{n-1})(p_n u_{n-1} - (p_n + 2\eta) u_n) \\
&= p_n(u_{n-1}^2 - u_n^2) - \eta(2u_n^2 + 2u_n u_{n-1}) \\
&\leqslant (p_n + \eta)(u_{n-1}^2 - u_n^2).
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(u_n(h) + u_{n-1}(h))^2 &= \int_0^h \frac{1}{2}[(u_n(t) + u_{n-1}(t))^2]' dt \\
&\leqslant (p_n + \eta) \int_0^h (u_{n-1}^2(t) - u_n^2(t))\, dt,
\end{aligned}$$

και έπεται ότι
$$\int_0^\infty u_n^2(t)\, dt \leqslant \int_0^\infty u_{n-1}^2(t)\, dt$$
για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Από την σύγκλιση των f_n στην f και από την ασθενή ακολουθιακή συμπάγεια της μοναδιαίας μπάλας του $L^2(0,\infty)$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $u \in L^2(0,\infty)$ που ικανοποιεί την
$$f(t) = \int_0^\infty e^{-ts} u(s) ds, \quad \text{για κάθε } t \geqslant 0.$$
Το επιχειρημα που χρησιμοποιήσαμε για την f δουλεύει και για την $f^*(t) := f(t-\eta)$ (αν επιλέξουμε $p_i^* = p_i + \eta$ και $\eta^* = 0$ στη θέση των p_i και η). Άρα,

$$f^*(t) = \int_0^\infty e^{-ts} u^*(s) ds, \quad \text{για κάθε } t \geqslant 0,$$

όπου $u^*(s) := e^{\eta s} u(s) \in L^2(0,\infty)$. Αυτό εξασφαλίζει ότι

$$\int_0^\infty |u(t)|\, dt < \infty,$$

άρα η f είναι της μορφής (6.3), με ν το μέτρο που έχει πυκνότητα την u.

Αναφορές

[1] J. M. Almira, *Muntz type theorems*, Surveys in Approximation Theory **3** (2007), 152-194.

[2] S. N. Bernstein, *Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes*, in Proc. of the fifthth Inter. Math. Congress (1912), 256-266.

[3] M. v. Golitschek, *A short proof of Muntz theorem*, J. Approx. Theory **39** (1983) 394-395.

[4] C. H. Muntz, *Uber den Approximationssatz von Weierstrass*, in H. A. Schwarz's Festschrift, Berlin, 1914, 303-312.

[5] O. Szász, *Uber die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen*, Math. Ann. **77** (1916), 482-496.