Σύνολα μοναδικότητας τριγωνομετρικών σειρών και θεωρία συνόλων

Βλάσης Μαστραντώνης

Περίληψη

Το πρόβλημα της μοναδικότητας του αναπτύγματος μιας συνάρτησης σε τριγωνομετρική σειρά έχει μεγάλη ιστορία, η οποία ξεκινάει από τον 19ο αιώνα με τη δουλειά των Riemann, Heine και Cantor. Ένα από τα πολύ ενδιαφέροντα σημεία αυτής της ιστορίας είναι ότι σχετίζεται άμεσα με την γέννηση της θεωρίας συνόλων: η προσπάθεια του Cantor να κατανοήσει την φύση των συνόλων για τα οποία δεν ισχύει η μοναδικότητα (των λεγόμενων συνόλων πολλαπλότητας) τον οδήγησε τελικά στη δημιουργία της θεωρίας συνόλων. Δύο θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας που ανέπτυξε ο Cantor, οι διατακτικοί αριθμοί και η υπερπεπερασμένη επαγωγή, εμφανίζονται για πρώτη φορά στις εργασίες του που είχαν θέμα τα σύνολα μοναδικότητας και πολλαπλότητας για τριγωνομετρικές σειρές. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει τα πρώτα αποτελέσματα πάνω σε αυτό το πρόβλημα, μέχρι και τη δουλειά του Cantor.

1 Το πρόβλημα της μοναδικότητας των τριγωνομετρικών σειρών

Μια *τριγωνομετρική σειρά* S είναι μια άπειρη σειρά της μορφής

$$S \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.1}$$

όπου $a_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$.

Το N-οστό *μερικό άθροισμα* της σειράς είναι το *τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.2}$$

Εάν, για δεδομένο x,

$$S_N(x) \to s \in \mathbb{C},$$

τότε γράφουμε

$$s = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.3}$$

και λέμε ότι ο s είναι το άθροισμα της σειράς στο x.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *αναπτύσσεται σε τριγωνομετρική σειρά*, εάν υπάρχει σειρά S της παραπάνω μορφής έτσι ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.4}$$

Είναι προφανές ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 2π.

Το πρόβλημα του χαρακτηρισμού εκείνων των συναρτήσεων f οι οποίες επιδέχονται ανάπτυγμα σε τριγωνομετρκή σειρά είναι εξαιρετικά δύσκολο, αλλά ένα από τα κλασσικά αποτελέσματα μας εξασφαλίζει ότι κάθε αρκετά «καλή» 2π-περιοδική συνάρτηση f, για παράδειγμα μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, αναπτύσσεται σε τριγωνομετρική σειρά

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.5}$$

όπου οι συντελεστές a_n, b_n δίνονται από τους *τύπους του Fourier*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt. \tag{1.6}$$

Το ερώτημα που φυσιολογικά προκύπτει είναι *εάν ένα τέτοιο ανάπτυγμα είναι μοναδικό.* Δηλαδή, εάν υποθέσουμε ότι

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx) \tag{1.7}$$

για κάθε x, είναι σωστό ότι $a_n = a_n'$ και $b_n = b_n'$ για κάθε n; Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε $c_n = a_n - a_n'$ και $d_n = b_n - b_n'$ τότε από την (1.7) με αφαίρεση προκύπτει

$$0 = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n \sin nx) \tag{1.8}$$

για κάθε x. Οπότε το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

Το πρόβλημα της μοναδικότητας. *Εάν* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *είναι μια τριγωνομετρική σειρά και*

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.9}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$*, αληθεύει ότι* $a_n = b_n = 0$ *για όλα τα* n*;*

Αυτό το πρόβλημα (που προέκυψε από την δουλειά του Riemann και του Heine) πρότεινε ο Heine, το 1869, στον 24-χρονο τότε Cantor, ο οποίος είχε μόλις δεχτεί μια θέση στο Πανεπιστήμιο του Halle, όπου ο Heine ήδη εργαζόταν.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την λύση του Cantor για το πρόβλημα της μοναδικότητας και θα δούμε πώς η αναζήτησή του για επεκτάσεις, οι οποίες να επιτρέπουν την εξαίρεση κάποιων σημείων, τον οδήγησε στην δημιουργία της Θεωρίας Συνόλων, στην έννοια του διατακτικού αριθμού και στη μέθοδο της υπερπεπερασμένης επαγωγής. Επίσης, θα δούμε πώς αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί η πρώτη μεγάλη επέκταση αυτού του τύπου.

Ας δώσουμε πρώτα μερικούς βολικούς συμβολισμούς. Κάθε σειρά

$$S \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.10}$$

μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.11}$$

όπου, $b_0 = 0$ και

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.12}$$

Συνεπώς $a_n = c_n + c_{-n}$ και $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Με αυτόν τον συμβολισμό, τα μερικά αθροίσματα δίνονται από την

$$S_N(X) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \tag{1.13}$$

και, εάν αυτά τα μερικά αθροίσματα συγκλίνουν στο s καθώς $N \to \infty$, γράφουμε

$$s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{1.14}$$

Τα συνήθη παραδείγματα τριγωνομετρικών σειρών είναι οι *σειρές Fourier* των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Δεδομένης μιας 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη* αν είναι Lebesgue μετρήσιμη και

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt < \infty. \tag{1.15}$$

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε τους *συντελεστές Fourier* $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, ως εξής:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt. \tag{1.16}$$

Ονομάζουμε την τριγωνομετρική σειρά

$$S(f) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} \tag{1.17}$$

σειρά Fourier της f, και γράφουμε

$$S_N(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx} \tag{1.18}$$

για τα μερικά της αθροίσματα.

Σημείωση. Υπάρχουν τριγωνομετρικές σειρές, όπως η $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$, που συγκλίνουν παντού αλλά δεν είναι σειρές Fourier ολοκληρώσιμης (κατά Riemann) συνάρτησης. Αυτό φαίνεται ως εξής: έστω $x \in [0,2\pi]$. Αν $x \neq 0, 2\pi$, έχουμε δει ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{1.19}$$

δηλαδή,

$$\left|\sum_{n=2}^{N} \sin(nx)\right| \leqslant |\sin x| + \frac{1}{|\sin(x/2)|}. \tag{1.20}$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(nx)$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Το ίδιο ισχύει αν $x=0$ ή $x=2\pi$, διότι, σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε $\sin(nx)=0$ για κάθε $n \geqslant 2$. Αφού η ακολουθία $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, από το κριτήριο του Dirichlet συμπεραίνουμε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n} \tag{1.21}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) συνάρτηση f ώστε $S(f) \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln n}$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $\widehat{f}(n) = -\frac{ib_n(f)}{2} = -\frac{i}{2\ln n}$ αν $n \geqslant 2$, $\widehat{f}(n) = -\frac{ib_n(f)}{2} = \frac{i}{2\ln(-n)}$ αν $n \leqslant -2$ και $\widehat{f}(n) = 0$ αλλιώς. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4\ln^2 n}. \tag{1.22}$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n} = +\infty$.

2 Η θεωρία του Riemann

Ο Riemann ήταν ο πρώτος μαθηματικός που μελέτησε σοβαρά τις τριγωνομετρικές σειρές γενικότερα (και όχι τις σειρές Fourier αποκλειστικά) στην Υφηγεσία του, το 1854. Θα αποδείξουμε δύο από τα κύρια αποτελέσματά του, που χρησιμοποιήθηκαν από τον Cantor. Τα αποτελέσματα αυτά είναι όμορφες εφαρμογές στοιχειώδους Απειροστικού Λογισμού.

Έστω $S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ αυθαίρετη τριγωνομετρική σειρά με *φραγμένους συνελεστές*. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|c_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ο Riemann είχε την εξαιρετική ιδέα να θεωρήσει την συνάρτηση που προκύπτει αν ολοκληρώσουμε τυπικά δύο φορές την $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Αυτή η συνάρτηση ονομαζεται *συνάρτηση Riemann* F_S της S, και ορίζεται ώς εξής:

$$F_S(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

όπου $\sum{}'$ σημαίνει ότι το $n = 0$ εξαιρείται.

Προφανώς, αφού οι c_n είναι φραγμένοι, η F_S είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ (αλλά δεν είναι περιοδική), αφού η παραπάνω σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα, διότι $\left|\frac{1}{n^2} c_n e^{inx}\right| \leqslant \frac{M}{n^2}$ (M-κριτήριο του Weierstrass).

Θα ήλπιζε κανείς, διαισθητικά, η F_S'' να συμπίπτει με το $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, αν αυτό το άθροισμα υπάρχει. Αυτό δεν ισχύει, αλλά ισχύει κάτι παραπλήσιό του.

Για δοθείσα συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, θέτουμε

$$\Delta^2 F(x, h) = F(x + h) + F(x - h) - 2F(x), \tag{2.2}$$

και ορίζουμε την *δεύτερη συμμετρική παράγωγο* ή *δεύτερη παράγωγο Schwartz* της F στο x ως εξής:

$$D^2 F(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 F(x, h)}{h^2}, \tag{2.3}$$

αν αυτό το όριο υπάρχει.

Σημείωση. Αν η $F_S''(x)$ υπάρχει, τότε υπάρχει και η $D^2 F_S(x)$, και οι δύο ποσότητες είναι ίσες, αλλά το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0 αφού δεν είναι συνεχής στο 0. Όμως,

$$\Delta^2 \operatorname{sgn}(x, h) = \operatorname{sgn}(0 + h) + \operatorname{sgn}(0 - h) - 2\operatorname{sgn}(0) = 1 + (-1) - 2 \cdot 0 = 0, \tag{2.5}$$

άρα

$$D^2\operatorname{sgn}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2\operatorname{sgn}(x,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0. \tag{2.6}$$

Θεώρημα 2.1 (το πρώτο λήμμα του Riemann). *Έστω $S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ τριγωνομετρική σειρά με φραγμένους συνελεστές. Αν το $s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ υπάρχει, τότε η $D^2 F_S(x)$ υπάρχει, και $D^2 F_S(x) = s$.*

Απόδειξη. Με υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\frac{\Delta^2 F_S(x,2h)}{4h^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin nh}{nh}\right]^2 c_n e^{inx} \tag{2.7}$$

(για $n = 0$ συμφωνούμε ότι $\frac{\sin nh}{nh} = 1$). Οπότε, είναι αρκετό να αποδείξουμε το εξής:

Λήμμα 2.2. *Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ τότε*

$$\lim_{h\to 0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sin nh}{nh}\right]^2 a_n\right] = a.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Τότε,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin{(n+1)h}}{(n+1)h}\right)^2\right] A_n. \tag{2.8}$$

Έστω $h_k \to 0, h_k > 0$. Θέτουμε

$$s_{kn} = \left(\frac{\sin nh_k}{nh_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin{(n+1)h_k}}{(n+1)h_k}\right)^2. \tag{2.9}$$

Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$A_n \xrightarrow{n} a \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n s_{kn} \xrightarrow{k} a. \tag{2.10}$$

Βλέπουμε τον άπειρο πίνακα (s_{kn}) ως μια *μέθοδο άθροισης*, δηλαδή σαν έναν τρόπο να μετασχηματίσουμε την ακολουθία (x_n) στην ακολουθία

$$(y_k) = (s_{kn})\cdot(x_n). \tag{2.11}$$

Με άλλα λόγια,

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} s_{kn} x_n. \tag{2.12}$$

Παράδειγμα 2.3. Αν $s_{kn} = \frac{1}{k+1}$ για $n \leqslant k$, $s_{kn} = 0$ για $n > k$, τότε

$$y_k = \frac{x_0 + \cdots + x_k}{k+1}.$$

Μία μέθοδος άθροισης καλείται **κανονική** αν $x_n \xrightarrow{n} x \Longrightarrow y_k \xrightarrow{k} x$. Ο Toeplitz απέδειξε το εξής θεώρημα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται.

Λήμμα 2.4. (α) *Έστω ότι ο πίνακας (s_{kn}) ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες, οι οποίες ονομάζονται συνθήκες Toeplitz:*

(i) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $s_{kn} \xrightarrow{k} 0$.*

(ii) *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} |s_{kn}| \leqslant c < \infty$.*

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} s_{kn} \xrightarrow{k} 1$.

Τότε, ο πίνακας (s_{kn}) ορίζει κανονική μέθοδο άθροισης.
(β) *Αν ο πίνακας (s_{kn}) ικανοποιεί τις* (i), (ii) *και $x_n \to 0$, τότε έχουμε $y_n \to 0$.* □

Με βάση το λήμμα, είναι αρκετό να ελέγξουμε τις (i), (ii), (iii) για την

$$s_{kn} = \left(\frac{\sin nh_k}{nh_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin{(n+1)h_k}}{(n+1)h_k}\right)^2. \tag{2.13}$$

Προφανώς, οι (i), (iii) ισχύουν. Για την (ii), θέτοντας $u(x) = \left(\frac{sinx}{x}\right)^2$ έχουμε: αφού

$$\int_0^\infty |u'(x)| dx < \infty, \tag{2.14}$$

βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |s_{kn}| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{nh_k}^{(n+1)h_k} u'(x)\, dx \right| \leqslant \int_0^\infty |u'(x)|\, dx = C < \infty. \tag{2.15}$$

Συνεπώς, η μέθοδος άθροισης (s_{kn}) ικανοποιεί τις συνθήκες Toeplitz, άρα είναι κανονική. Έπεται ότι:

$$A_n \xrightarrow{n} a \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n s_{kn} \xrightarrow{k} a. \tag{2.16}$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε την (2.10). Αν h_k είναι ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $h_k \xrightarrow{k} 0$, έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\sin nh_k}{nh_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin{(n+1)h_k}}{(n+1)h_k}\right)^2 \right] A_n = a, \tag{2.17}$$

και αφου η (s_{kn}) είναι κανονική, έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sin nh_k}{nh_k}\right]^2 a_n\right] = a. \tag{2.18}$$

Συνεπώς, αν $s = \sum c_n e^{inx}$, εφαρμόζοντας το παραπάνω με $a_n = c_n e^{inx}$ και $a = s$ για την τυχούσα (h_k) με $h_k > 0$ και $h_k \to 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin nh}{nh}\right]^2 c_n e^{inx} = s \Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2 F_S(x,2h)}{4h^2} = s\\ \Longrightarrow D^2 F_S(x) = s,\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το πρώτο λήμμα του Riemann. □

Θεώρημα 2.5 (το δεύτερο λήμμα του Riemann). *Έστω $S \sim \sum c_n e^{inx}$ τριγωνομετρική σειρά με $c_n \to 0$. Τότε*

$$\frac{\Delta^2 F_S(x,h)}{h} = \frac{F_S(x+h)+F_S(x-h)-2F_S(x)}{h} \to 0, \tag{2.19}$$

ομοιόμορφα ως προς x καθώς το $h \to 0$.

Απόδειξη. Κάνοντας πράξεις, έχουμε

$$\frac{\Delta^2 F_S(x,2h)}{4h} = \sum \frac{\sin^2 nh}{n^2 h} c_n e^{inx}, \tag{2.20}$$

(όπου, για $n = 0$, το $\frac{\sin^2 nh}{n^2 h}$ γίνεται h). Έστω $0 < h_k \leqslant 1, h_k \to 0$ και

$$t_{kn} = \frac{\sin^2(nh_k)}{n^2 h_k}. \tag{2.21}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\sum(c_n e^{inx} t_{kn}) \to 0$ καθώς $k \to \infty$, ομοιόμορφα ως προς x. Επειδή $c_n e^{inx} \to 0$, ομοιόμορφα ως προς x, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι η (t_{kn}) ικανοποιεί τις δύο πρώτες συνθήκες του Toeplitz (i), (ii).

Προφανώς η (i) ισχύει. Για να δείξουμε την (ii) σταθεροποιούμε k και επιλέγουμε $N > 1$ με

$$N - 1 \leqslant h_k^{-1} < N. \tag{2.22}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|t_{kn}| &= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{\sin^2 nh_k}{n^2h_k}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\sin^2 nh_k}{n^2h_k}\\ &\leqslant (N-1)\cdot h_k+\frac{1}{h_k}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\ &\leqslant 1+\frac{1}{h_k}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1+\frac{1}{h_k}\cdot\frac{1}{N-1}\leqslant 3,\end{aligned}$$

και η (ii) αποδείχθηκε. □

Αυτό συνεπάγεται ότι το γράφημα της F_S δεν μπορεί να έχει γωνίες, για παράδειγμα, αν η αριστερή και η δεξιά παράγωγος της F_S υπάρχουν σε ένα σημείο x, τότε πρέπει να είναι ίσες.

3 Το θεώρημα μοναδικότητας του Cantor

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδείχθηκε αρχικά από τον Cantor, ο οποίος αναφερόταν σε «διαστήματα» αντί για «σύνολα θετικού μέτρου».

Θεώρημα 3.1 (λήμμα Cantor-Lebesgue). *Αν $a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\to 0$ για όλα τα x σε ένα σύνολο θετικού μέτρου (Lebesgue), τότε $a_n, b_n\to 0$. Συνεπώς, εάν $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}=0$ για όλα τα x σε ένα σύνολο θετικού μέτρου, τότε $c_n\to 0$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n, b_n\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $\rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ και θεωρούμε φ_n τέτοιο ώστε

$$a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=\rho_n\cos(nx+\varphi_n). \tag{3.1}$$

Από την υπόθεση, $\rho_n\cos(nx+\varphi_n)\to 0$ για όλα τα x σε ένα σύνολο $E\subseteq[0,2\pi)$ θετικού μέτρου.

Υποθέτουμε ότι $\rho_n\not\to 0$ για να καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon>0$ και $n_0<n_1<n_2<\cdots$ τέτοια ώστε $\rho_{n_k}\geqslant\varepsilon$. Τότε, $\cos(n_kx+\varphi_{n_k})\to 0$, άρα $2\cos^2(n_kx+\varphi_{n_k})\to 0$, δηλαδή $1+\cos^2(n_kx+\varphi_{n_k})\to 0$ για κάθε $x\in E$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\int_E(1+\cos 2(n_kx+\varphi_{n_k}))\,dx\to 0,$$

δηλαδή, αν χ_E είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του E στο διάστημα $[0,2\pi)$, επεκτεταμένη ώστε να είναι 2π-περιοδική σε όλο το $\mathbb{R}$, και αν $\lambda(E)$ είναι το μέτρο Lebesgue του E, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(E)+\int_0^{2\pi}\chi_E(x)\cos 2(n_kx+\varphi_{n_k})\,dx\\ =\lambda(E)+2\pi\left[\operatorname{Re}\widehat{\chi_E}(-2n_k)\cdot\cos 2\varphi_{n_k}-\operatorname{Im}\widehat{\chi_E}(-2n_k)\cdot\sin 2\varphi_{n_k}\right]\to 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το *λήμμα Riemann-Lebesgue*:

Λήμμα 3.2. *Αν f είναι μια ολοκληρώσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε $\widehat{f}(n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Έπεται τώρα από την (3.2) ότι $\lambda(E) = 0$, που είναι άτοπο. □

Αρκεί να δείξουμε ένα ακόμα λήμμα για να δείξουμε το θεώρημα του Cantor. Το λήμμα αποδείχθηκε από τον Schwartz, ο οποίος απήντησε σε σχετικό ερώτημα του Cantor.

Λήμμα 3.3 (Schwartz)**.** *Έστω $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $D^2F(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε, η F είναι κυρτή στο (a,b). Ειδικότερα, αν η $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $D^2F(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η F είναι γραμμική στο (a,b).*

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την F με την $F + \varepsilon x^2$, όπου $\varepsilon > 0$, και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $D^2F(x) > 0$ για όλα τα $x \in (a,b)$.

Υποθέτουμε ότι η F δεν είναι κυρτή και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε, υπάρχουν γραμμική συνάρτηση $\mu x + \nu$ και $a < c < d < b$ τέτοια ώστε για την $G(x) = F(x) - (\mu x + \nu)$ να έχουμε $G(c) = G(d) = 0$ και $G(x) > 0$ για κάποιο $x \in (c,d)$. Έστω x_0 το σημείο στο οποίο η G παίρνει μέγιστη τιμή στο $[c,d]$. Τότε $c < x_0 < d$. Για αρκετά μικρό h, $\Delta^2F(x_0,h) \leqslant 0$, και άρα $D^2F(x_0) \leqslant 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Τώρα μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.4 (Cantor, 1870)**.** *Αν $\sum c_n e^{inx} = 0$ για κάθε x, τότε $c_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Έστω $S \sim c_n e^{inx}$. Από το λήμμα Cantor-Lebesgue έχουμε $c_n \to 0$ καθώς $|n| \to \infty$. Ειδικότερα, η (c_n) είναι φραγμένη. Από το πρώτο λήμμα του Riemann έχουμε $D^2F_S(X) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και συνεπώς, από το λήμμα του Schwartz η F_S είναι γραμμική, δηλαδή,

$$c_0\frac{x^2}{2} - {\sum}'\frac{1}{n^2}c_n e^{inx} = ax + b. \tag{3.3}$$

Θέτοντας $x = \pi, x = -\pi$ και αφαιρώντας, βλέπουμε ότι $a = 0$. Θέτοντας $x = 0, x = 2\pi$ και αφαιρώντας, παίρνουμε $c_0 = 0$. Άρα,

$${\sum}'\frac{1}{n^2}c_n e^{inx} = b.$$

Αφού αυτή η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, αν $m \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} be^{-imx}\,dx = {\sum}'\frac{1}{n^2}c_n\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx \\ &= \frac{c_m}{m^2}, \end{aligned}$$

και συνεπώς $c_m = 0$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Παρατήρηση 3.5. Ο Kronecker (όταν ακόμα είχε καλές σχέσεις με τον Cantor) του επισήμανε ότι δεν ήταν απαραίτητο να χρησιμοποιήσει κανείς την $c_n \to 0$, δηλαδή, αν κανείς μπορεί να αποδείξει ότι

$$\sum c_n e^{inx} = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και ότι } c_n \to 0 \implies c_n = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}, \tag{3.4}$$

τότε έπεται ότι

$$\sum c_n e^{inx} = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \implies c_n = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

Για να αποδειξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, υποθέτουμε το (3.4) και θεωρούμε μια σειρά $\sum c_n e^{inx}$ τέτοια ώστε $\sum c_n e^{inx} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (χωρίς καμία παραπάνω υπόθεση για τους c_n). Θέτοντας $x, x+u, x-u$, προσθέτοντας και διαιρώντας με 2, παίρνουμε

$$\sum c_n e^{inx} \cos nu = 0 \text{ για κάθε } x, u \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Ισοδύναμα,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos nu = 0 \text{ για κάθε } x, u \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Σταθεροποιώντας τώρα το x, παρατηρούμε ότι

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0,$$

διότι $c_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$. Εφαρμόζοντας την (3.4) παίρνουμε $a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0$ για κάθε x και $n \in \mathbb{N}$, από το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι $a_n = b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4 Σύνολα μοναδικότητας

Στη συνέχεια ο Cantor επεξέτεινε το θεώρημα της μοναδικότητας, το 1871, επιτρέποντας πεπερασμένο αριθμό εξαιρουμένων σημείων.

Θεώρημα 4.1 (Cantor, 1871). *Έστω ότι $\sum c_n e^{inx} = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος $x \in \mathbb{T}$. Τότε, $c_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Έστω $S \sim \sum c_n e^{inx}$. Υποθέτουμε ότι για κάποια $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 2\pi = x_{n+1}$ ισχύει ότι: για κάθε $x \neq x_i$ έχουμε $\sum c_n e^{inx} = 0$. Τότε, από το λήμμα του Schwartz, η F_S είναι γραμμική σε κάθε διάστημα (x_n, x_{n+1}). Από το δεύτερο λήμμα του Riemann, το γράφημα της F_S δεν έχει γωνίες, και έπεται ότι F_S είναι γραμμική στο $[0, 2\pi)$. Το ίδιο ισχύει φυσικά για κάθε διάστημα μήκους 2π, οπότε η F_S είναι γραμμική και έτσι, όπως και απόδειξη του Θεωρήματος 3.4, βλέπουμε ότι $c_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Στα επόμενα θα είναι βολικό να ταυτίσουμε τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T} = \{e^{ix} : 0 \leqslant x < 2\pi\}$ με το $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ μέσω της απεικόνισης $x \mapsto e^{ix}$. Συχνά βολεύει να σκεφτόμαστε το $\mathbb{T}$ ώς το $[0, 2\pi)$, ή το $[0, 2\pi]$ με το 0 και το 2π να ταυτίζονται. Συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{T}$ μπορούμε επίσης να τις σκεφτόμαστε ώς 2π-περιοδικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με ν το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{T}$ κανονικοποιημένο έτσι ώστε $\nu(\mathbb{T}) = 1$.

Τώρα θα εισάγουμε την έννοια του **συνόλου μοναδικότητας**.

Ορισμός 4.2. Έστω $E \subseteq \mathbb{T}$. Λέμε ότι το E είναι **σύνολο μοναδικότητας** αν για κάθε τριγωνομετρική σειρά $\sum c_n e^{inx}$ η οποία συγκλίνει στο 0 σε όλα τα σημεία που δεν ανήκουν στο E (δηλαδή, $\sum c_n e^{inx} = 0$ αν $e^{ix} \notin E$, για το οποίο απλώς θα γράφουμε «$x \notin E$») είναι ταυτοτικά μηδέν. Διαφορετικά, το E καλείται **σύνολο πολλαπλότητας**.

Με αυτήν την ορολογία, το Θεώρημα 3.4 μας λέει ότι το $\emptyset$ είναι σύνολο μοναδικότητας, ενώ το Θεώρημα 4.1 μας λέει ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι σύνολο μοναδικότητας.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{U}$ την κλάση των συνόλων μοναδικότητας και με $\mathcal{M}$ την κλάση των συνόλων πολλαπλότητας. Επόμενος στόχος μας είναι να αποδείξουμε την παρακάτω επέκταση του θεωρήματος του Cantor.

Θεώρημα 4.3 (Cantor, Lebesgue)**.** *Κάθε αριθμήσιμο κλειστό σύνολο είναι σύνολο μοναδικότητας.*

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα 4.3 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπερπεπερασμένης επαγωγής.

4.1 Το θεώρημα Cantor-Bendixson

Έστω $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό σύνολο. Ορίζουμε την *Cantor-Bendixson παράγωγο* E' του E ως εξής:

$$E' = \{x \in E : x \text{ είναι σημείο συσσώρευσης του } E\}. \tag{4.1}$$

Παρατηρήστε ότι $E' \subseteq E$ και ότι το E' είναι επίσης κλειστό.

Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ένα κλειστό σύνολο $E^{(\alpha)}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= E \\ E^{(\alpha+1)} &= (E^{(\alpha)})' \\ E^{(\lambda)} &= \bigcap_{\alpha<\lambda} E^{(\alpha)}, \ \text{ αν ο } \lambda \text{ είναι οριακός διατακτικός.} \end{aligned}$$

Τα σύνολα $E^{(\alpha)}$ σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων που περιέχονται στο E:

$$E^{(0)} \supseteq E^{(1)} \supseteq E^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq E^{(\alpha)} \supseteq \cdots \supseteq E^{(\beta)} \supseteq \cdots, \quad \alpha \leqslant \beta. \tag{4.2}$$

Λήμμα 4.4. *Έστω F_α, όπου α διατακτικός αριθμός, μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων. Τότε, υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός α_0 τέτοιος ώστε*

$$F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1}. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια βάση $\{U_n\}$ της τοπολογίας του $\mathbb{T}$ και ορίζουμε

$$A_\alpha = \{n : U_n \cap F_\alpha = \emptyset\}. \tag{4.4}$$

Τότε, αν $\alpha \leqslant \beta$ έχουμε $A_\alpha \subset A_\beta$. Ας υποθέσουμε ότι το A_α είναι γνήσιο υποσύνολο του $A_{\alpha+1}$ για όλους τους αριθμήσιμους διατακτικούς α. Θέτουμε $f(\alpha)$ τον ελάχιστο φυσικό n που ανήκει στο $A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$. Τότε, αν συμβολίσουμε με ω_1 τον πρώτο υπεραριθμήσιμο διατακτικό, τον οποίο μπορούμε να ταυτίσουμε και με το σύνολο $\{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ όλων των αριθμήσιμων διατακτικών, έχουμε ότι η απεικόνιση $f : \omega_1 \to \mathbb{N}$ είναι 1-1, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, για κάποιον $\alpha_0 < \omega_1$ έχουμε $A_{\alpha_0} = A_{\alpha_0+1}$, και αυτό σημαίνει ότι $F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1}$. □

Έτσι, για κάθε κλειστό σύνολο $E \subseteq \mathbb{T}$ υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμήσιμος διατακτικός α τέτοιος ώστε $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)}$. Έπεται ότι $E^{(\alpha)} = E^{(\beta)}$ για κάθε $\beta \geqslant \alpha$. Συμβολίζουμε αυτόν τον διατακτικό με $rk_{\mathrm{CB}}(E)$ και τον καλούμε *δείκτη Cantor-Bendixson* του E. Επίσης, ορίζουμε

$$E^{(\infty)} = E^{(rk_{\mathrm{CB}}(E))}.$$

Παρατηρούμε ότι $(E^{(\infty)})' = E^{(\infty)}$, δηλαδή το $E^{(\infty)}$ είναι *τέλειο σύνολο* (κάθε σημείο του είναι και σημείο συσσώρευσής του). Το ενδεχόμενο να έχουμε $E^{(\infty)} = \emptyset$ δεν αποκλείεται.

Θεώρημα 4.5. *Έστω $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό σύνολο. Τότε, το σύνολο $E \setminus E^{(\infty)}$ είναι αριθμήσιμο. Ειδικότερα, το E είναι αριθμήσιμο αν και μόνο αν $E^{(\infty)} = \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in E \setminus E^{(\infty)}$. Υπάρχει μοναδικός διατακτικός $\alpha < rk_{\mathrm{CB}}(E)$ τέτοιος ώστε $x \in E^{(\alpha)} \setminus E^{(\alpha+1)}$. Αφού υπάρχουν αριθμήσιμοι το πλήθος τέτοιοι α, αρκεί να δείξουμε ότι:

Για κάθε κλειστό σύνολο F, το σύνολο $F \setminus F'$ είναι αριθμήσιμο.

Πράγματι, σταθεροποιούμε μια βάση $\{U_n\}$ της τοπολογίας του $\mathbb{T}$ και παρατηρούμε ότι αν $x \in F \setminus F'$ τότε υπάρχει φυσικός n ώστε $F \cap U_n = \{x\}$. Άρα,

$$F \setminus F' = \bigcup \{F \cap U_n : \text{ το } F \cap U_n \text{ είναι μονοσύνολο}\},$$

και το τελευταίο σύνολο είναι προφανώς αριθμήσιμο. □

4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3

Έστω E ένα αριθμήσιμο κλειστό σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι η τριγωνομετρική σειρά $S \sim \sum c_n e^{inx}$ ικανοποιεί την

$$\sum c_n e^{inx} = 0 \text{ για κάθε } x \notin E.$$

Αφού κάθε μεταφορά ενός συνόλου μοναδικότητας είναι σύνολο μοναδικότητας, μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι $0 \notin E$. Έτσι, μπορούμε να βλέπουμε το E σαν ένα κλειστό σύνολο το οποίο περιέχεται στο $(0, 2\pi)$.

Το συμπλήρωμα οποιουδήποτε κλειστού $F \subseteq E$ στο $(0, 2\pi)$ είναι μια ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων που τα άκρα τους ανήκουν στο $F \cup \{0, 2\pi\}$. Θα ονομάζουμε τα διαστήματα αυτά «συμπληρωματικά διαστήματα» του F.

Θα δείξουμε, με υπερπεπερασμένη επαγωγή ως προς α, ότι η F_S είναι γραμμική σε κάθε συμπληρωματικό διάστημα του $E^{(\alpha)}$. Αφού $E^{(\alpha_0)} = \emptyset$ για κάποιον α_0, αυτό θα δείξει ότι η F_S είναι γραμμική στο $(0, 2\pi)$ και, όπως στις προηγούμενες αποδείξεις, θα μπορέσουμε να συμπεράνουμε ότι $c_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

1. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $\alpha = 0$: το ζητούμενο ισχύει διότι $\sum c_n e^{inx} = 0$ σε κάθε συμπληρωματικό διάστημα του $E^{(0)} = E$.

2. Το βήμα $\alpha \implies \alpha + 1$: Υποθέτουμε ότι η F_S είναι γραμμική σε κάθε συμπληρωατικό διάστημα του $E^{(\alpha)}$. Έστω (a, b) ένα συμπληρωματικό διάστημα του $E(\alpha + 1)$. Τότε, σε κάθε κλειστό διάστημα $[c, d] \subseteq (a, b)$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος σημεία $c \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant d$ του $E^{(\alpha)}$. Άρα, τα $(c, x_0), (x_0, x_1), \ldots, (x_n, d)$ περιέχονται σε συμπληρωματικά διαστήματα του $E^{(\alpha)}$, και από την επαγωγική υπόθεση η F_S είναι γραμμική σε καθένα από αυτά. Από το δεύτερο λήμμα του Riemann, η F_S είναι γραμμική στο $[c, d]$, άρα και στο (a, b).

3. Το βήμα $\alpha < \lambda \implies \lambda$, όπου ο λ είναι οριακός διατακτικός. Χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα συμπάγειας. Σταθεροποιούμε ένα συμπληρωματικό διάστημα (a, b) του $E^{(\lambda)}$ και ένα κλειστό υποδιάστημα $[c, d] \subseteq (a, b)$. Τότε,

$$\begin{aligned}[c, d] \subseteq (0, 2\pi) \setminus E^{(\lambda)} &= (0, 2\pi) \setminus \bigcap_{\alpha<\lambda} E^{(\alpha)} \\ &= \bigcup_{\alpha<\lambda} [(0, 2\pi) \setminus E^{(\alpha)}].\end{aligned}$$

Αφού το $(0, 2\pi) \setminus E^{(\alpha)}$ είναι ανοικτό και το $[c, d]$ είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \lambda$ τέτοιοι ώστε

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}} [(0, 2\pi) \setminus E^{(\alpha)}] \subseteq (0, 2\pi) \setminus E^{(\beta)}$$

για κάποιον (οποιονδήποτε) β με $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta < \lambda$. Τότε το $[c, d]$ περιέχεται σε κάποιο συμπληρωματικό διάστημα του $E^{(\beta)}$, και από την επαγωγική υπόθεση η F_S είναι γραμμική στο $[c, d]$, άρα και στο (a, b).

Με τα 1, 2 και 3, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ιστορικά σχόλια. Ο Cantor δημοσίευσε, το 1872, μια απόδειξη του Θεωρήματος 4.3, μόνο στην περίπτωση που $rk_{\mathrm{CB}}(E) < \omega$, δηλαδή στην περίπτωση που η διαδικασία Cantor-Bendixson τερματίζεται σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα. Σε αυτό το σημείο, είχε όπως φαίνεται (τουλάχιστον διαισθητικά) την ιδέα να επεκτείνει αθτήν την διαδικασία επ¨ άπειρον, στα επίπεδα $\omega, \omega+1, \ldots$. Αυτό όμως το πρόγραμμα παρουσίαζε εννοιολογικά εμπόδια, τα οποία τον ώθησαν να επανεξετάσει τα θεμέλια του συστήματος των πραγματικών αριθμών και τελικά να δημιουργήσει την θεωρία συνόλων και, ανάμεσα σε άλλα (και πολύ αργότερα), την αυστηρή ανάπτυξη της θεωρίας των διατακτικών αριθμών και την υπερπεπερασμένη επαγωγή. Όμως, μετά το 1872 ο Cantor δεν επανήλθε στο πρόβλημα της μοναδικότητας των τριγωνομετρικών σειρών και δεν δημοσίευσε ποτέ μια πλήρη απόδειξη του Θεωρήματος 4.3. Αυτό έγινε πολύ αργότερα, από τον Lebesgue το 1903.

Το Θεώρημα 4.1 επεκτάθηε από τον Bernstein (1908) και τον W. H. Young (1909) οι οποίοι απέδειξαν ότι *κάθε αριθμήσιμο σύνολο* είναι σύνολο μοναδικότητας. Τέλος, η Bari (1923) απέδειξε ότι *η ένωση αριθμήσιμων το πλήθος κλειστών συνόλων μοναδικότητας* είναι σύνολο μοναδικότητας.

5 Σύνολα μοναδικότητας και μέτρο Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο δείχνουμε ότι τα σύνολα μοναδικότητας έχουν μηδενικό μέτρο Lebesgue. Θα χρειαστούμε την «αρχή της τοπικότητας» για τις σειρές Fourier.

Πρόταση 5.1. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει στο 0 σε κάθε ανοικτό διάστημα στο οποίο η f μηδενίζεται.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} S_N(f,x) &= \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)\,dt \\ &= (f * D_N)(x), \end{aligned}$$

όπου D_N είναι ο *πυρήνας του Dirichlet* που ορίζεται ως εξής:

$$D_N(u) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} = \cos Nu + \cot\left(\frac{u}{2}\right)\sin Nu.$$

Αλλάζοντας το $[0,2\pi]$ σε $[-\pi,\pi]$ έχουμε

$$S_N(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos Nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cot\left(\frac{u}{2}\right)\sin Nt\,dt.$$

Αν υποθέσουμε ότι η f μηδενίζεται σε ένα διάστημα γύρω από το 0, τότε η $t \mapsto f(t)\cot\left(\frac{t}{2}\right)$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα τα δύο αυτά ολοκληρώματα τείνουν στο 0 από το λήμμα Riemann-Lebesgue. Συνεπώς, $S_N(f,0) \to 0$.

Έτσι, έχουμε δείξει ότι αν η f μηδενίζεται σε ένα διάστημα γύρω από το 0, τότε η σειρά Fourier της συγκλίνει στο 0 στο σημείο 0. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη μεταφορά (της f) δείχνουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε άλλο σημείο. □

Θεώρημα 5.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{T}$ ένα μετρήσιμο σύνολο μοναδικότητας. Τότε, $\nu(A) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\nu(A) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Λόγω της κανονικότητας του μέτρου Lebesgue, υπάρχει κλειστό $F \subseteq A$ με $\nu(F) > 0$. Θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση χ_F του F και την σειρά Fourier της, $S(\chi_F)$.

Από την Πρόταση 5.1 βλέπουμε ότι $S_N(\chi_f, x) \to 0$ σε κάθε $x \notin F$ (πράγματι, αφού το F είναι κλειστό, αν $x \notin F$ τότε υπάρχει διάστημα I, στο οποίο ανήκει το x, με $I \cap F = \emptyset$, άρα $\chi_F \equiv 0$ στο I). Δηλαδή,

$$S(F,x) = 0 \ \text{ για κάθε}\, x \notin F.$$

Αφού το F είναι σύνολο μοναδικότητας, συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\chi_F}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ειδικότερα, $\widehat{\chi_F}(0) = 0$. Όμως,

$$\widehat{\chi_F}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \chi_F(x)\,dx = \nu(F) > 0,$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

Παρατηρήσεις 5.3. Στις αρχές του 20ου αιώνα, πολλοί άνθρωποι πίστευαν ότι κάθε σύνολο μέτρου 0 είναι σύνολο μοναδικότητας. Δηλαδή ότι, αν μια τριγωνομετρική σειρά $\sum c_n e^{inx}$ συγκλίνει στο 0 σχεδόν παντού τότε όλοι οι συντελεστές c_n μηδενίζονται. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι, από το θεώρημα Fêjer-Lebesgue, οι Cesàro μέσοι της σειράς Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f συγκλίνουν στην f σχεδόν παντού. Ειδικότερα, αν μια σειρά Fourier συγκλίνει σχεδόν παντού στο 0, τότε όλοι οι συντελεστές της μηδενίζονται.

Στην διδακτορική διατριβή του Luzin (*Integraion and trigonometric series*, 1915) γίνεται μελέτη αυτού του προβλήματος για τις τριγωνομετρικές σειρές. Ο Luzin θεωρούσε απίθανο να υπάρχει μια μη-μηδενική τριγωνομετρική σειρά η οποία να συγκλίνει στο 0 σχεδόν παντού.

Προς μεγάλη έκπληξη πολλών, το 1916, ο Menshov απέδειξε ότι, πράγματι, υπάρχουν μη-μηδενικές τριγωνομετρικές σειρές που συγκλίνουν στο 0 σχεδόν παντού. Μια συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ότι κάθε συνάρτηση που έχει ανάπτυγμα σε τριγωνομετρική σειρά, έχει στην πραγματικότητα περισσότερα από ένα τέτοια αναπτύγματα, αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι μόνο η σχεδόν παντού σύγκλιση στη συνάρτηση.

Ο Menshov απέδειξε επίσης ότι *κάθε* μετρήσιμη συνάρτηση έχει ένα (σχεδόν παντού) τριγωνομετρικό ανάπτυγμα: αν f είναι μια 2π-περιοδική μετρήσιμη συνάρτηση τότε υπάρχει τριγωνομετρική σειρά $\sum c_n e^{inx}$ τέτοια ώστε $f(x) = \sum c_n e^{inx}$ σχεδόν παντού (και, από τα προηγούμενα, η f έχει περισσότερα από ένα τέτοια αναπτύγματα).

Μάλιστα, ο Menshov κατασκεύασε παράδειγμα *κλειστού* συνόλου πολλαπλότητας με μηδενικό μέτρο, θεωρώντας κατάλληλη τροποποίηση του συνόλου του Cantor. Στο πρώτο βήμα αφαίρεσε το μεσαίο $1/2$-ανοικτό διάστημα του $[0, 2\pi]$, στο δεύτερο βήμα τα μεσαία $1/3$-ανοικτά διαστήματα των κλειστών διαστημάτων που είχαν απομείνει, στο τρίτο βήμα τα μεσαία $1/4$-ανοικτά διαστήματα των κλειστών διαστημάτων που είχαν απομείνει, και ούτω καθεξής. Το οριακό σύνολο E_M είναι το σύνολο του Menshov. Εύκολα ελέγχεται ότι $\lambda(E_M) = 0$. Ο Menshov απέδειξε ότι το E_M είναι σύνολο πολλαπλότητας, αντιστοιχίζοντας στο E_M ένα μέτρο πιθανότητας μ_M στο $[0, 2\pi]$ με $\mu_M(E_M) = 1$, το οποίο είχε την ιδιότητα

$$\widehat{\mu_M}(n) := \int e^{-int} d\mu_M(t) \xrightarrow{n} 0. \tag{5.1}$$

Από αυτήν την ιδιότητα μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\sum \widehat{\mu_M}(n) e^{inx} = 0 \quad \text{για κάθε } \; x \in [0, 2\pi] \setminus E_M. \tag{5.2}$$

Αφού το μ_M είναι μέτρο πιθανότητας, οι συντελεστές $\widehat{\mu_M}(n)$ δεν είναι όλοι 0, όμως, αφού $\lambda(E_M) = 0$, η τριγωνομετρική σειρά $\sum c_n e^{inx}$ συγκλίνει στο 0 σχεδόν παντού. Τέλος, από την κατασκευή, το E_M είναι κλειστό.