

Καμπύλες που γεμίζουν τον χώρο

Δήμητρα Διαμαντοπούλου και Δήμητρα Πιλίτσου

Περίληψη

Περιγράφουμε δύο κλασσικές συνεχείς, 1-1 και επί συναρτήσεις $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$: την καμπύλη του Peano και την καμπύλη του Lebesgue. Στη συνέχεια περιγράφουμε την απόδειξη του θεωρήματος των Hahn και Mazurkiewicz: Ένα υποσύνολο A του \mathbb{R}^n είναι εικόνα μιας συνεχούς απεικόνισης $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν είναι συμπαγές, συνεκτικό και ασθενώς τοπικά συνεκτικό.

1 Εισαγωγή

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα στην ιστορία των μαθηματικών, που δημοσιεύτηκε το 1878 από τον G. Cantor (1845-1918), ήταν ότι κάθε δύο πεπερασμένης διάστασης λείες πολλαπλότητες¹ έχουν, ως σύνολα, τον ίδιο πληθάρημο. Πιο συγκεκριμένα, έδειξε ότι μπορεί να οριστεί μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ την οποία και κατέγραψε.

Αυτό το αποτέλεσμα γέννησε πολλά ερωτήματα: Είναι δυνατόν να βρεθεί μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ η οποία να είναι και συνεχής; Την απάντηση την έδωσε ο E. Netto (1848-1919) το 1879, αποδεικνύοντας πως μια τέτοια συνάρτηση είναι πάντα μη συνεχής. Αν μειώσουμε τις απαιτήσεις μας αφαιρώντας την υπόθεση ότι η f είναι 1-1 τότε είναι δυνατόν να βρούμε μια $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ή ισοδύναμα $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ επί και συνεχή; Ο μαθηματικός G. Peano κατασκεύασε το 1890 μια τέτοια συνάρτηση. Σήμερα, απεικονίσεις με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται καμπύλες που γεμίζουν το χώρο ή καμπύλες Peano. Άλλα παραδείγματα τέτοιων απεικονίσεων δόθηκαν από τους D. Hilbert (1891), E. H. Moore (1900), H. Lebesgue (1904), W. Sierpiński (1912), G. Pólya (1913) και άλλους.

Με το $[0, 1]^2$ να αποτελεί συνεχή εικόνα του $[0, 1]$ προέκυψε το ζήτημα κάτω από ποιές προϋποθέσεις ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n είναι συνεχής εικόνα ενός διαστήματος του \mathbb{R} . Το 1908, ο A. Schoenflies βρήκε ένα κριτήριο, το οποίο μπορούσε να εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση του \mathbb{R}^2 . Η περαιτέρω μελέτη αυτού του ερωτήματος οδήγησε στην τοπολογική έννοια της τοπικής συνεκτικότητας, και το 1913 οι H. Hahn και S. Mazurkiewicz έδωσαν πλήρη απάντηση, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλον: ένα σύνολο είναι συνεχής εικόνα ενός ευθύγραμμου τμήματος αν και μόνο αν είναι συμπαγές, συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό. Μάλιστα, το κριτήριο αυτό δεν περιορίζεται στα υποσύνολα του \mathbb{R}^n , αλλά ισχύει γενικότερα για κάθε χώρο Hausdorff.

¹Λείες πολλαπλότητες ονομάζουμε τους χώρους που μοιάζουν τοπικά με κάποιον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n .

Εμείς θα μελετήσουμε την καμπύλη του Peano για την ιστορική της σημασία, καθώς και ένα αντίστοιχο παράδειγμα καμπύλης, αυτό του Lebesgue, που σχετίζεται άρρηκτα με την απόδειξη του θεωρήματος των Hahn-Mazurkiewicz. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας δίνουμε την απόδειξη του θεωρήματος των Hahn-Mazurkiewicz.

2 Καμπύλες που γεμίζουν το χώρο

2.1 Η καμπύλη του Peano

Ο Peano όρισε μια απεικόνιση $f_p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ χρησιμοποιώντας τον τελεστή $kt_j := 2 - t_j$, $t_j = 0, 1, 2$, ως εξής:

$$(1) \quad f_p(0 \cdot t_1 t_2 t_3 t_4 \dots) = (0 \cdot t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots, 0 \cdot (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4 \dots)),$$

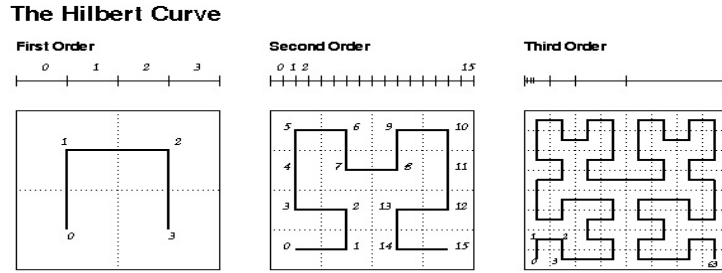
όπου $k^\nu = k \circ k \circ \dots \circ k$, ν -φορές.

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή είναι καλώς ορισμένη, επί και συνεχής. Θα ακολουθήσει μια εναλλακτική περιγραφή της καμπύλης, όπου και θα αποδειχτούν οι παραπάνω ιδιότητες.

Παρόλο που ο Peano ήταν αυτός που ανακάλυψε την πρώτη καμπύλη που γεμίζει το χώρο, ο μαθηματικός D. Hilbert (1862-1943) ήταν ο πρώτος που διαπίστωσε το 1891 την ύπαρξη μιας γενικής γεωμετρικής διαδικασίας που επιτρέπει την κατασκευή μιας ολόκληρης οικογένειας καμπυλών που γεμίζουν το χώρο.

Η διαδικασία αυτή βασίζεται στον εξής συλλογισμό: αν είναι εφικτό να βρεθεί συνεχής και επί απεικόνιση από το διάστημα $[0, 1]$ στο $[0, 1]^2$, τότε - χωρίζοντας το $[0, 1]$ σε 4 ίσα υποδιαστήματα και το $[0, 1]^2$ σε 4 ίσα τετράγωνα - κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα απεικονίζεται συνεχώς και επί σε ένα από τα υποτετράγωνα. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία επ' άπειρον, τα $[0, 1]$ και $[0, 1]^2$ χωρίζονται σε 2^{2n} ίσα διαστήματα και τετράγωνα αντίστοιχα. Ο D. Hilbert υπέδειξε πως τα υποτετράγωνα μπορούν να διευθετηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε:

- (α) διαδοχικά διαστήματα να απεικονίζονται σε γειτονικά τετράγωνα με μία πλευρά κοινή, και
- (β) οι σχέσεις εγκλεισμού να διατηρούνται (δηλαδή, αν ένα διάστημα αντιστοιχεί σε ένα τετράγωνο τότε τα υποδιαστήματα του πρώτου αντιστοιχούν στα υποτετράγωνα του δεύτερου).



Σχήμα 1: Καμπύλη του Hilbert

Αυτό υποδηλώνει πως και άλλες καμπύλες που γεμίζουν το χώρο μπορούν να προκύψουν από την ίδια γενική διαδικασία, δεδομένου ότι ένα επίπεδο σχήμα μπορεί να διαιρεθεί σε μια σειρά από αντίγραφα.

Παρατήρηση 2.1. Γενικότερα, στις καμπύλες που γεμίζουν το χώρο δεν εξετάζουμε μόνο την περίπτωση όπου η εικόνα του $[0, 1]$ είναι το $[0, 1]^2$ αλλά και οποιοδήποτε υποσύνολο του \mathbb{R}^2 με θετικό περιεχόμενο Jordan (δηλαδή, τρίγωνο, παραλληλόγραμμο κλπ). Έτσι λοιπόν, ενώ δεν έχουμε καμία ένδειξη γεωμετρικής ερμηνείας από τον Peano, ο Hilbert φαίνεται να εμπνεύστηκε την παραπάνω διαδικασία παρατηρώντας τα εξής:

Σύμφωνα με την (1) έχουμε ότι

$$f_p(0 \cdot 00t_3t_4t_5 \dots) = (0 \cdot 0\xi_2\xi_3\xi_4 \dots, 0 \cdot 0\eta_2\eta_3\eta_4 \dots),$$

το οποίο σημαίνει ότι το διάστημα $[0, 1/9]$ απεικονίζεται στο τετράγωνο 1 όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Με τον ίδιο τρόπο, η

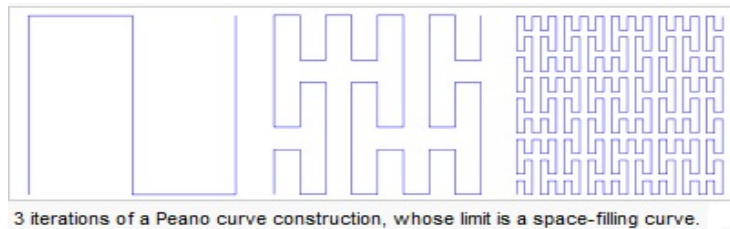
$$f_p(0 \cdot 01t_3t_4t_5 \dots) = (0 \cdot 0\xi'_2\xi'_3\xi'_4 \dots, 0 \cdot 1\eta'_2\eta'_3\eta'_4 \dots)$$

δηλώνει ότι το διάστημα $[1/9, 2/9]$ απεικονίζεται στο τετράγωνο 2. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία βλέπουμε ότι το διάστημα $[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}]$, $j = 1, 2, \dots, 9$ απεικονίζεται στο τετράγωνο j .

3	4	9
2	5	8
1	6	7

Σχήμα 2: Η απεικόνιση του Peano

Έτσι λοιπόν, μπορούμε να πάρουμε την καμπύλη του Peano με μια επαγωγική διαδικασία, όπου στο n -οστό βήμα χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε 3^{2n} ίσα υποδιαστήματα και τα απεικονίζουμε στα 3^{2n} υποτετράγωνα με την σειρά που υποδεικνύεται στο επόμενο σχήμα (για $n = 1, 2$ και 3):



Σχήμα 3: Γεωμετρική κατασκευή της καμπύλης του Peano

Είναι εύκολο να δούμε ότι ικανοποιούνται οι απαιτήσεις (α) και (β) της προηγούμενης γενικής μεθόδου.

Ορίζεται έτσι μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, όπου κάθε f_n είναι μια συνεχής συνάρτηση και καθώς προχωράμε «έρχονται ολοένα και πιο κοντά» (βλέπε παραπάνω f_1, f_2, f_3).

Λήμμα 2.2. Για κάθε $n, m > N$ έχουμε

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \sqrt{2} \cdot 9^{-\min\{n,m\}}.$$

Ως εκ τούτου, η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n > m$. Για να πάμε από την f_m στην f_n τροποποιούμε κατάλληλα την f_m μέσα σε κάθε ένα από τα 3^{2m} τετράγωνα. Σε κάθε τετράγωνο η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι το πολύ όσο και το μήκος της διαγωνίου, δηλαδή $\sqrt{2} \cdot 9^{-m}$. \square

Η $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ που δίνεται από την $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ είναι η καμπύλη Peano. Η **συνέχεια** της f προκύπτει από την ομοιόμορφη σύγκλιση και το γεγονός ότι οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3. Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^n$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Τότε, η $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in [0, 1]$ και $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Η f_{n_0} είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής στο x_0 . Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο x_0 . □

Τώρα, δείχνουμε ότι η f είναι **επί**:

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η n -οστή καμπύλη f_n περνά μέσα από τα κέντρα όλων των 3^{2n} τετραγώνων. Ως εκ τούτου, κάθε $z = (x, y) \in [0, 1]^2$ απέχει από κάποιο σημείο $f_n(u_n)$ στην εικόνα της f_n , απόσταση μικρότερη από $\frac{\sqrt{2}}{2}3^{-2n}$, δηλαδή

$$\|z - f_n(u_n)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}3^{-2n}.$$

Περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποια $u_{s_n} \rightarrow u \in [0, 1]$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε

$$\begin{aligned} \|f(u) - z\| &\leq \|f(u) - f(u_{s_n})\| + \|f(u_{s_n}) - f_{s_n}(u_{s_n})\| + \|f_{s_n}(u_{s_n}) - z\| \\ &\leq \|f(u) - f(u_{s_n})\| + \|f - f_{s_n}\|_\infty + \|f_{s_n}(u_{s_n}) - z\| \\ &\leq \|f(u) - f(u_{s_n})\| + \sqrt{2} \cdot 3^{-2s_n} + \frac{\sqrt{2}}{2}3^{-2s_n} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

λόγω της συνέχειας της f στο u . Συνεπώς, το $z = (x, y)$ ανήκει στην κλειστή θήκη της εικόνας της f .

Όπως θα δούμε και παρακάτω, η εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό σύνολο. Έτσι, τελικά, το (x, y) ανήκει στην εικόνα της f . □

2.2 Η καμπύλη του Lebesgue

Ο ορισμός της καμπύλης του Lebesgue βασίζεται στο σύνολο του Cantor, το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0, 1]$ που έχουν τριαδικό ανάπτυγμα στο οποίο δεν εμφανίζεται το ψηφίο 1. Γεωμετρικά, το σύνολο του Cantor προκύπτει ως εξής: Ορίζουμε $C_0 = [0, 1]$ και $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή χωρίζουμε κάθε διάστημα του C_1 σε τρία ίσα υποδιαστήματα και αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία C_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ κλειστών υποσυνόλων του $[0, 1]$. Κάθε C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών ξένων διαστημάτων μήκους $1/3^n$. Το σύνολο $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ ονομάζεται σύνολο Cantor και είναι τέλειο σύνολο δηλαδή είναι κλειστό και

κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης. Επιπλέον, είναι και συμπαγές ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} .

Ο Lebesgue όρισε μια συνάρτηση $\ell : C \rightarrow [0, 1]^2$ ως εξής:

$$\ell(0 \cdot (2a_1)(2a_2)(2a_3)\dots) = (0 \cdot a_1a_3a_5\dots, 0 \cdot a_2a_4a_6\dots).$$

Πρόταση 2.4. *Η ℓ είναι επί του $[0, 1]^2$.*

Απόδειξη. Έστω $p \in [0, 1]^2$. Τότε, οι συντεταγμένες του p μπορούν να εκφραστούν στο δυαδικό σύστημα ως εξής:

$$p = (0 \cdot a_1a_2a_3\dots, 0 \cdot b_1b_2b_3\dots).$$

Αν θεωρήσουμε το $t = 0 \cdot (2a_1)(2b_1)(2a_2)(2b_2)\dots$, βλέπουμε ότι $f(t) = p$. □

Πρόταση 2.5. *Η ℓ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $|y - x| < \frac{1}{3^{2n+1}}$ τότε

$$(2) \quad \|\ell(y) - \ell(x)\| < \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

Πράγματι, αν $|y - x| < \frac{1}{3^{2n+1}}$ τότε τα πρώτα $2n$ τριαδικά ψηφία των x, y θα είναι ίδια. Έτσι τα πρώτα n δυαδικά ψηφία των συντεταγμένων των $\ell(x), \ell(y)$ θα είναι ίδια, άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα. □

Ο Lebesgue επέκτεινε αυτή τη συνάρτηση σε όλο το $[0, 1]$ θέτοντας $\tilde{\ell}(x) = \ell(x)$ αν $x \in C$, και

$$\tilde{\ell}(x) = (\ell(b_n) - \ell(a_n)) \frac{x - a_n}{b_n - a_n} + \ell(a_n)$$

αν $x \in (a_n, b_n) \subset [0, 1] \setminus C$, όπου (a_n, b_n) είναι τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρέθηκαν στην κατασκευή του συνόλου Cantor.

Πρόταση 2.6. *Η $\tilde{\ell}$ είναι επί, καθώς η ℓ είναι επί, και είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Η $\tilde{\ell}$ είναι συνεχής στα διαστήματα (a_n, b_n) αφού είναι γραμμική. Μένει να δείξουμε τη συνέχεια στα σημεία του C . Καθώς το C είναι τέλει σύνολο, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

- (i) Το x να είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά.
- (ii) Το x να είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά.
- (iii) Το x να είναι σημείο συσσώρευσης και από τις δύο πλευρές.

Αρκεί να ασχοληθούμε με την πρώτη περίπτωση. Εφόσον το x είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά, θα είναι το δεξί άκρο κάποιου ανοικτού διαστήματος (a_n, b_n) που αφαιρέθηκε κατά την κατασκευή του C . Έχουμε εξασφαλίσει τη συνέχεια από τα αριστερά καθώς η $\tilde{\ell}$ είναι γραμμική εκεί. Θεωρούμε $0 < \delta < \frac{1}{3^{2n+1}}$ και $x < y$ με $|y - x| < \delta$. Τότε:

(α) Αν $y \in C$ τότε

$$\|\tilde{\ell}(y) - \tilde{\ell}(x)\| = \|\ell(y) - \ell(x)\| < \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

σύμφωνα με την (2).

(β) Αν $y \in [0, 1] \setminus C$ τότε $y \in (a_n, b_n) = (a, b)$ με $x < a < b < x + \delta$ και τελικά

$$\begin{aligned} \|\tilde{\ell}(y) - \tilde{\ell}(x)\| &= \left\| (\ell(b) - \ell(a)) \frac{y - a}{b - a} + \ell(a) - \ell(y) \right\| \\ &\leq \frac{1}{b - a} (\|\ell(b) - \ell(y)\| \cdot (y - a) + \|\ell(a) - \ell(y)\| \cdot (b - y)) \\ &< \frac{1}{b - a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^n} (y - a + b - y) = \frac{\sqrt{2}}{2^n}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $\tilde{\ell}$ είναι συνεχής στο x . □



Σχήμα 4: Οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις της καμπύλης του Lebesgue

3 Το θεώρημα Hahn-Mazurkiewicz

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, με το $[0, 1]^2$ να αποτελεί συνεχή εικόνα του $[0, 1]$ προέκυψε το ερώτημα ποιές συνθήκες απαιτούνται προκειμένου ένα σύνολο να βρεθεί στη θέση του $[0, 1]^2$. Το 1908 ο μαθηματικός A. Schoenflies διατύπωσε έναν χαρακτηρισμό για τέτοια σύνολα που αφορά όμως μόνο υποσύνολα του Ευκλείδειου επιπέδου. Οι H. Hahn και S. Mazurkiewicz το 1913, σε ανεξάρτητες μελέτες, κατέληξαν σε έναν ολοκληρωμένο χαρακτηρισμό για υποσύνολα του \mathbb{R}^n που μπορεί να επεκταθεί και σε γενικότερους χώρους. Αποτελούσε ουσιαστικά μια γενίκευση της κατασκευής της καμπύλης Lebesgue. Τα στοιχεία που έκαναν μια τέτοια κατασκευή εφικτή ήταν δύο. Πρώτον, το $[0, 1]^2$ μπορεί να θεωρηθεί

ως συνεχής εικόνα του συνόλου Cantor και δεύτερον, είναι δυνατή η επέκταση αυτής της συνεχούς απεικόνισης από το C σε ολόκληρο το $[0, 1]$.

Ο F. Hausdorff απέδειξε ότι κάθε συμπαγές σύνολο είναι συνεχής εικόνα του συνόλου Cantor. Όμως η συμπαγεία δεν καθιστά ένα σύνολο συνεχή εικόνα του $[0, 1]$ καθώς δύο ακόμα συνθήκες είναι αναγκαίες όπως θα δούμε: η συνεκτικότητα και η τοπική συνεκτικότητα (Hahn-Mazurkiewicz). Τέλος, ο Hahn, με τη συμβολή της μαθήτριάς του Marie Torhorst, έδειξε πώς το παραπάνω αποτέλεσμα στον \mathbb{R}^2 , συγκεκριμένα, είναι ισοδύναμο με τον χαρακτηρισμό του Schoenflies.

Για να συνεχίσουμε, θα χρειαστούμε κάποιες βασικές έννοιες και θεωρήματα.

Ορισμός 3.1. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *συμπαγές* αν κάθε ανοικτή του κάλυψη, δηλαδή κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $(U_j)_{j \in J}$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ έχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_{j_1}, U_{j_2}, \dots, U_{j_k}\}$ με $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{j_i}$.

Αποδεικνύεται ότι, ισοδύναμα, ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A έχει υπακολουθία (x_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιο $a \in A$.

Θεώρημα 3.2. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο (έπεται άμεσα από το Θεώρημα των Bolzano-Weierstrass).

Θεώρημα 3.3. Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής και το A είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(A)$. Για κάθε y_n υπάρχει x_n στο A : $y_n = f(x_n)$. Παίρνουμε έτσι ακολουθία (x_n) στο A και αφού το A είναι συμπαγές υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in A$. Η f είναι συνεχής, άρα από την αρχή της μεταφοράς $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0) \in f(A)$. Η (y_n) έχει λοιπόν υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του $f(A)$. Άρα, το $f(A)$ είναι συμπαγές. \square

Ορισμός 3.4. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *συνεκτικό* αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε:

(i) $U \cap A \neq \emptyset$ και $V \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A$.

(iii) $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$.

Ο ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής: ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν υποσύνολά του X και Y ανοικτά στο A , με τις εξής ιδιότητες: $A = X \cup Y$, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ και $X \cap Y = \emptyset$. (Αρκεί να θέσουμε $X = U \cap A$ και $Y = V \cap A$).

Θεώρημα 3.5. Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής και το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^n τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν ανοικτά $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε: $U \cap f(A) \neq \emptyset$, $V \cap f(A) \neq \emptyset$, $(U \cap f(A)) \cup (V \cap f(A)) = f(A)$ και $(U \cap f(A)) \cap (V \cap f(A)) = \emptyset$. Αφού όμως η f είναι συνεχής τότε τα σύνολα $Q = f^{-1}(U)$, $U = f^{-1}(V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του A και έχουν τις ιδιότητες: $A = X \cup Y$, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ και $X \cap Y = \emptyset$, δηλαδή το A είναι μη συνεκτικό με βάση την αναδιατύπωση του ορισμού. Άτοπο από την υπόθεση. \square

Θεώρημα 3.6. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.

Απόδειξη. (\Leftarrow) Έστω A διάστημα το οποίο είναι μη συνεκτικό. Τότε υπάρχουν ανοικτά $U, V \subseteq \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A$ και $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $a \in A \cap U$ και $b \in A \cap V$. Εφόσον το A είναι διάστημα, για κάθε $t \in [a, b]$ έχουμε ότι $t \in A$. Θέτουμε $T = \{t \in [a, b] : t \in A \cap U\}$. Το $T \neq \emptyset$ γιατί $a \in T$ και είναι φραγμένο. Έστω $t_0 = \sup T \in [a, b]$.

Έστω ότι $t_0 \in A \cap V$. Το V είναι ανοικτό σύνολο άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(t_0 - \delta, t_0] \subseteq A \cap V$. Από τον ορισμό του t_0 και από τον χαρακτηρισμό του supremum υπάρχει $t \in A \cap U$, $a \leq t \leq b$ τέτοιο ώστε $t_0 - \delta < t \leq t_0$. Έτσι θα έχουμε ότι $t \in (A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$. Άτοπο.

Έστω ότι $t_0 \in A \cap U$. Το U είναι ανοικτό και $b > t_0$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $[t_0, t_0 + \delta) \subseteq A \cap U$. Άτοπο, από τον ορισμό του t_0 .

Έτσι λοιπόν βρήκαμε $a < t_0 < b$ με $t_0 \notin (A \cap U) \cup (A \cap V) = A$. Άτοπο.

(\Rightarrow) Έστω A συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R} που δεν είναι διάστημα. Τότε υπάρχουν $a, b \in A$ και $z \notin A$ με $a < z < b$. Θεωρούμε τα σύνολα $U = \{x \in \mathbb{R} : x < z\}$ και $V = \{x \in \mathbb{R} : x > z\}$. Παρατηρήστε ότι $a \in U$ και $b \in V$. Τα U, V είναι ανοικτά και ισχύουν $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A$ και $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$. Άτοπο. \square

Μπορούμε τώρα να δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Netto.

Θεώρημα 3.7 (Netto). Μια συνεχής και επί συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ δεν μπορεί να είναι $1 - 1$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι $1 - 1$. Τότε θα υπάρχει η $f^{-1} = g$ και θα είναι συνεχής (άρα η f είναι ομοιομορφισμός): Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]$. Εφόσον είναι φραγμένο, θα είναι συμπαγές. Έχουμε ότι $f(A) = g^{-1}(A)$ και ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στέλνει συμπαγή σύνολα σε συμπαγή σύνολα. Κάθε συμπαγές υποσύνολο του $[0, 1]^2$ είναι κλειστό. Έτσι, η εικόνα κλειστού συνόλου μέσω της g^{-1} θα είναι κλειστό σύνολο και τελικά δουλεύοντας με συμπληρώματα, η εικόνα ανοικτού θα είναι ανοικτό σύνολο. Άρα η g είναι συνεχής. Ο ομοιομορφισμός διατηρεί την συνεκτικότητα, όπως αποδείχτηκε παραπάνω. Διαλέγουμε ένα $y \in [0, 1]^2$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(y) = x$ και $x \in (0, 1)$. Τότε ο περιορισμός της f^{-1} από το $[0, 1]^2 \setminus \{y\}$ στο $[0, x) \cup (x, 1]$ είναι συνεχής και απεικονίζει συνεκτικό σύνολο σε μη συνεκτικό σύνολο. Άτοπο. \square

Το θεώρημα αυτό απεδείχθη το 1927 από τον Hausdorff και το 1928, ανεξάρτητα, από τον Alexandroff.

Θεώρημα 3.8 (Hausdorff). Κάθε συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n είναι συνεχής εικόνα του συνόλου Cantor.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και έστω η κάλυψή του που δίνεται από τις $B(a, 1)$, $a \in A$. Δηλαδή, θεωρούμε την κάλυψη

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, 1).$$

Λόγω της συμπαγείας του A υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{n_1}} B(a_i, 1),$$

όπου επαναλαμβάνουμε στοιχεία της κάλυψης αν είναι απαραίτητο ώστε το συνολικό του πλήθος να θεωρηθεί δύναμη του 2.

Για κάθε i θεωρούμε το $A_i = \overline{B}(a_i, 1) \cap A$, όπου $\overline{B}(x, \delta)$ είναι η κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα δ , και παίρνουμε την κάλυψη

$$A_i \subseteq \bigcup_{a \in B(a_i, 1) \cap A} B(a, 1/2).$$

Μπορούμε πάλι, να περάσουμε σε υποκαλύψεις $A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^{n_2}} B(a_{i,j}, 1/2)$, όπου ο n_2 είναι ανεξάρτητος από το $i = 1, \dots, 2^{n_1}$. Θέτουμε

$$A_{i,j} = \overline{B}(a_{i,j}, 1/2) \cap \overline{B}(a_i, 1) \cap A,$$

και συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία, υποδιπλασιάζοντας την ακτίνα των μπαλών σε κάθε βήμα.

Παρατηρούμε ότι για κάθε επιλογή δεικτών $1 \leq k_s \leq 2^{n_s}$, $s \geq 1$, η ακολουθία

$$A_{k_1}, A_{k_1, k_2}, \dots, A_{k_1, k_2, \dots, k_m}, \dots$$

είναι φθίνουσα. Αφού οι διάμετροι αυτών των συνόλων φθίνουν στο 0 έχουμε

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{k_1, k_2, \dots, k_m} = \{a\}$$

για κάποιο $a \in A$. Αφού κάθε σημείο του A , για κάθε $m \geq 1$, ανήκει σε κάποιο από τα σύνολα A_{k_1, k_2, \dots, k_m} , όλα τα σημεία του A προκύπτουν ως τομές τέτοιων φθίνουσών ακολουθιών.

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε ακολουθία $\{a_t\}_{t=1}^{\infty}$ που έχει όρους 0 ή 1 σε μια ακολουθία αριθμών $1 \leq k_m \leq 2^{n_m}$ ως εξής: για κάθε m θέτουμε $k_m = \sum_{j=1}^{n_m} a_{j+n_1+\dots+n_{m-1}} 2^{j-1} \in$

$\{1, \dots, 2^{n_m}\}$. Με βάση αυτήν την αντιστοίχιση, και το προηγούμενο σχήμα καλύψεων, ορίζουμε $f : C \rightarrow A$ ως εξής:

$$f(0 \cdot (2a_1)(2a_2)(2a_3) \dots) = \text{το μοναδικό σημείο του } \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{k_1, k_2, \dots, k_m}.$$

Από την προηγούμενη παρατήρηση, η f είναι επί του A . Μπορούμε να δείξουμε ότι είναι και συνεχής: αν $|y - x| < \frac{1}{3^{n+1}}$ τότε τα πρώτα n ψηφία στα τριαδικά αναπτύγματα των x και y συμπίπτουν. Θεωρούμε m τέτοιον ώστε

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m \leq n < n_1 + n_2 + \dots + n_m + n_{m+1}.$$

Τότε, τα $f(x)$ και $f(y)$ ανήκουν και τα δύο στο A_{k_1, k_2, \dots, k_m} , το οποίο έχει διάμετρο μικρότερη από $\frac{2}{2^{m-1}}$. Άρα, $\|f(y) - f(x)\| < \frac{1}{2^{m-2}}$. Άρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε πρώτα m τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^{m-2}} < \varepsilon$ και κατόπιν $n \geq n_1 + n_2 + \dots + n_m$ και θέτοντας $\delta = \frac{1}{3^{n+1}}$ εξασφαλίζουμε ότι αν $|x - y| < \delta$ τότε $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. \square

Για την διατύπωση και την απόδειξη του θεωρήματος Hahn-Mazurkiewicz θα χρειαστούμε διάφορες παραλλαγές της έννοιας της συνεκτικότητας.

Ορισμός 3.9. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *τοπικά συνεκτικό* αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε ανοιχτή περιοχή U του a στο A , υπάρχει συνεκτική περιοχή $V \subset U$ του a .

Ορισμός 3.10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα $E \subseteq A$ ονομάζεται *συνεκτική συνιστώσα* του A αν είναι μη κενό μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του A , δηλαδή αν για κάθε συνεκτικό σύνολο E_1 με $E \subseteq E_1 \subseteq A$ ισχύει $E = E_1$.

Παρατηρήσεις 3.11. (α) Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλειστό σύνολο (γιατί αν το $E \subseteq A$ είναι συνεκτικό τότε και το \bar{E} είναι συνεκτικό).

(β) Αν το A είναι ανοικτό τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 3.12. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *ασθενώς τοπικά συνεκτικό* αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε ανοιχτή περιοχή $U \subseteq A$ του a , υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \subseteq U$ του a τέτοια ώστε αν $x \in V$ τότε τα x, a ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του U .

Ειδικότερα: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει $0 < \varepsilon < \eta$ τέτοιο ώστε αν $x \in B(a, \varepsilon)$ τότε τα x, a ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $A \cap B(a, \eta)$.

Λήμμα 3.13. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ασθενώς τοπικά συνεκτικό αν και μόνο αν είναι τοπικά συνεκτικό.

Απόδειξη. (\Leftarrow) Προφανές από ορισμό.

(\Rightarrow) Αρκεί να δείξουμε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του A είναι ανοικτά σύνολα. Έστω $U \subseteq A$ ανοικτό. Έστω C μια συνεκτική συνιστώσα του U , έστω $c \in C$ και έστω $U_c \subset U$ μια ανοιχτή περιοχή του c . Λόγω της ασθενούς τοπικής

συνεκτικότητας υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V_c \subset U_c$ του c τέτοια ώστε αν $x \in V_c$ τότε τα c, x ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του U_c . Ειδικότερα, τα c, x ανήκουν στο C . Τότε $V_c \subset C$, δηλαδή το C είναι ανοιχτό. Τώρα μπορούμε να πάρουμε για V στον ορισμό τη συνεκτική συνιστώσα του U που περιέχει το a . \square

Παρατήρηση 3.14. Παρόλο που η ασθενής τοπική συνεκτικότητα είναι ισοδύναμη έννοια με αυτήν της τοπικής συνεκτικότητας, η ασθενής τοπική συνεκτικότητα σε σημείο δεν συνεπάγεται τοπική συνεκτικότητα στο σημείο αυτό.

Ορισμός 3.15. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *ομοιόμορφα ασθενώς τοπικά συνεκτικό* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε αν $a, a' \in A$ και $\|a - a'\| < \eta$ τότε τα a, a' ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) \cap A$.

Λήμμα 3.16. Αν το $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές και ασθενώς τοπικά συνεκτικό τότε είναι ομοιόμορφα ασθενώς τοπικά συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το A δεν είναι ομοιόμορφα ασθενώς τοπικά συνεκτικό. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$, $\eta_s \rightarrow 0$ και $\|a_s - a'_s\| < \eta_s$ τέτοια ώστε τα a_s, a'_s να ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του $B(a_s, \varepsilon) \cap B(a'_s, \varepsilon) \cap A$. Από συμπάγεια μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα a_s και a'_s συγκλίνουν σε κάποιο (απαραίτητα το ίδιο) σημείο a . Από την ασθενή τοπική συνεκτικότητα στο a για την περιοχή $B(a, \varepsilon)$ παίρνουμε $0 < \eta < \varepsilon$ τέτοιο ώστε αν $x \in B(a, \eta)$ τότε τα x, a ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $B(a, \varepsilon)$. Παίρνουμε s αρκετά μεγάλο ώστε $\eta_s < \frac{\eta}{2}$ και $\|a - a_s\| < \frac{\eta}{2}$, $\|a - a'_s\| < \frac{\eta}{2}$. Τότε τα a_s και a'_s ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $B(a, \eta)$ και τελικά στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $B(a_s, \varepsilon) \cap B(a'_s, \varepsilon) \cap A$. Άτοπο. \square

Ορισμός 3.17. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *συνεκτικό κατά μονοπάτια* αν για κάθε $a, b \in A$ υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f : [0, 1] \rightarrow A$ τέτοια ώστε $f(0) = a$ και $f(1) = b$ (δηλαδή αν οποιαδήποτε δύο σημεία του μπορούν να ενωθούν με ένα συνεχές μονοπάτι του οποίου η εικόνα περιέχεται στο A).

Ορισμός 3.18. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *ομοιόμορφα συνεκτικό κατά μονοπάτια* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε αν $a, a' \in A$ και $\|a - a'\| < \eta$ τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [0, 1] \rightarrow B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) \cap A$ με $f(0) = a$ και $f(1) = a'$.

Ορισμός 3.19. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *τοπικά συνεκτικό κατά μονοπάτια* αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε ανοιχτή περιοχή U του a στο A υπάρχει περιοχή $V \subset U$ του a που είναι συνεκτικό κατά μονοπάτια σύνολο.

Ορισμός 3.20. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *ομοιόμορφα τοπικά συνεκτικό κατά μονοπάτια* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε αν $a, a' \in A$ και $\|a - a'\| < \eta$ τότε υπάρχει συνεχής $f : [0, 1] \rightarrow B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon)$ με $f(0) = a$ και $f(1) = a'$.

Λήμμα 3.21. (α) Αν ένα σύνολο είναι συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό κατά μονοπάτια τότε είναι συνεκτικό κατά μονοπάτια.

(β) Αν ένα σύνολο είναι ομοιόμορφα τοπικά συνεκτικό κατά μονοπάτια τότε είναι και τοπικά συνεκτικό κατά μονοπάτια.

Απόδειξη. Το (β) είναι φανερό από τους ορισμούς. Για το (α) έστω $a \in A$ και $P_a \subset A$ το σύνολο όλων των σημείων του A που μπορούν να ενωθούν με το a μέσω ενός συνεχούς μονοπατιού. Το P_a είναι ανοικτό λόγω της τοπικής συνεκτικότητας κατά μονοπάτια. Έχουμε ότι $A = \bigsqcup P_{a_i}$. Τότε, το συμπλήρωμα του P_a είναι ανοικτό σύνολο, άρα το P_a κλειστό. Ένα κλειστό και ανοικτό σύνολο είναι συνεκτική συνιστώσα και εφόσον το A είναι συνεκτικό σύνολο θα έχουμε ότι $P_a = A$. \square

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα Hahn-Mazurkiewicz.

Θεώρημα 3.22 (Hahn-Mazurkiewicz). Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι εικόνα μιας συνεχούς απεικόνισης $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν είναι συμπαγές, συνεκτικό και ασθενώς τοπικά συνεκτικό.

Απόδειξη. (\implies) Από το Θεώρημα 3.3 και το Θεώρημα 3.5 το $A = f([0, 1])$ είναι συμπαγές και συνεκτικό.

Έστω ότι υπάρχει $a \in A$ για το οποίο η συνθήκη της ασθενούς τοπικής συνεκτικότητας δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $\eta_n > 0$ με $\eta_n \rightarrow 0$ και $a_n \in B(a, \eta_n) \cap A$ τέτοια ώστε τα a και a_n να μην ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $B(a, \varepsilon)$. Λόγω κατασκευής έχουμε ότι $a_n \rightarrow a$. Έστω $x_n \in [0, 1]$ στοιχείο της αντίστροφης εικόνας του a_n μέσω της f . Από την συμπαγεια του $[0, 1]$ υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε $x_{k_n} \rightarrow x \in [0, 1]$ με $f(x) = a$, από την αρχή της μεταφοράς. Από τη συνέχεια της f έχουμε ότι υπάρχει δ_0 τέτοιο ώστε $|x - y| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Παίρνοντας N αρκετά μεγάλο ώστε $|x - x_{k_N}| < \varepsilon$ έχουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[x, x_{k_N}]$ (ή $[x_{k_N}, x]$) απεικονίζεται στο $B(a, \varepsilon) \cap A$. Δηλαδή, τα a, a_{k_N} ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $B(a, \varepsilon) \cap A$. Άτοπο από την υπόθεση.

(\impliedby) Αφού το A είναι συμπαγές, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Hausdorff βρίσκουμε μια συνεχή συνάρτηση $g : C \rightarrow A$.

Αφού το A είναι ομοιόμορφα συνεκτικό κατά μονοπάτια, μπορούμε να βρούμε φθίνουσα ακολουθία $\{\eta_s\}$ θετικών αριθμών ώστε: αν $\|a - a'\| < \eta_s$ τότε υπάρχει συνεχής καμπύλη που περιέχεται στο $B(a, 2^{-s}) \cap B(a', 2^{-s}) \cap A$. Από τη συνέχεια της g και τη συμπαγεια του C , υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{\delta_s\}$ θετικών αριθμών ώστε αν $x, y \in C$ και $|x - y| < \delta_s$ τότε $\|g(y) - g(x)\| < \eta_s$. Αν (a_k, b_k) είναι ένα από τα ανοικτά διαστήματα του $[0, 1] \setminus C$ τέτοιο ώστε $\delta_{s+1} \leq b_s - a_s < \delta_s$, τότε μπορούμε να βρούμε συνεχή καμπύλη $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow A$ που η εικόνα της περιέχεται στο $B(g(a_k), 2^{-s}) \cap B(g(b_k), 2^{-s}) \cap A$ και συνδέει τα $g(a_k)$ και $g(b_k)$. Ορίζουμε $f : [a, b] \rightarrow A$ θέτοντας

$$f(x) = g(x) \quad \text{αν } x \in C$$

και

$$f(x) = \gamma_k(x) \quad \text{αν } x \in (a_k, b_k) \subset [0, 1] \setminus C.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1] \setminus C$, και για τη συνέχεια στα σημεία του C διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- (i) Το x να είναι σημείο συσσώρευσης του C από δεξιά.
- (ii) Το x να είναι σημείο συσσώρευσης του C από αριστερά.
- (iii) Το x να είναι σημείο συσσώρευσης του C και από τις δύο πλευρές.

Αρκεί να ασχοληθούμε με την πρώτη περίπτωση, και συγκεκριμένα τη συνέχεια από δεξιά: θεωρούμε δ με $0 < \delta < \delta_s$ και $y > x$ με $|y - x| < \delta$. Τότε, είτε $y \in C$ ή $y \in (a_k, b_k) \subset [0, 1] \setminus C$, και $b_k - x < \delta_s$.

Αν $y \in C$ τότε $|y - x| < \delta_s$, άρα $\|f(y) - f(x)\| = \|g(y) - g(x)\| \leq \eta_s$. Αν $y \notin C$, τότε το y ανήκει στην εικόνα μιας καμπύλης που περιέχεται στην $B(g(x), 2^{-s})$, άρα $\|f(y) - f(x)\| \leq \frac{1}{2^s}$. Άρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $s \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\min\{\eta_s, 2^{-s}\} < \varepsilon$ και, επιλέγοντας $\delta = \delta_s$ βλέπουμε ότι αν $|y - x| < \delta_s$ τότε $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. \square

Αναφορές

- [1] A. P. M. Kupers, *On space-filling curves and the Hahn-Mazurkiewicz theorem*.
- [2] H. Sagan, *Space-filling curves*, Universitext Series, Springer-Verlag, 1994.