Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue
11 Απριλίου 2014

1. (2 μον.) (α) Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leq \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\delta}{k^2 \pi \delta} \cos kx.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

2. (2 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

3. (2.5 μον.) (α) Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία καλών πυρήνων και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$f * K_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

(β) Έστω f και g συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

1. $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
3. Αν η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη τότε η $f * g$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και

$$(f * g)' = f * g'.$$

Ορισμοί – συμβολισμός

1. Αν f και g είναι 2π-περιοδικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, η **συνέλιξη** $f * g$ των f και g ορίζεται στο $[-\pi, \pi]$ ως εξής

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y)\, dy.$$

2. Αν f είναι 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για κάθε $p \geq 1$ ορίζουμε

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

4. (2.5 μον.) (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει G_δ-σύνολο H ώστε $A \subseteq H$ και

$$\mu^*(A) = \mu(H).$$

(β) Έστω B μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν το F είναι μετρήσιμο και $B \subseteq F$ τότε

$$\mu^*(F \setminus B) > 0.$$

(γ) Έστω C μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(C) < \infty$. Δείξτε ότι: αν $C \subseteq G$ τότε

$$\mu^*(G \setminus C) = \mu^*(G) - \mu(C).$$

(δ) Έστω D μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με $\mu(D) = 1$. Δείξτε ότι

$$\overline{D} = [0,1].$$

(ε) Έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό και πυκνό υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ με

$$\mu(E) < \varepsilon.$$

5. (1.5 μον.) (α) Έστω $E \neq \emptyset$ μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $g : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι η $f \circ g : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$, το

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο.

6. (2.5 μον.) (α) Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$ τότε

$$\int_E f \, d\mu < \varepsilon.$$

Χρησιμοποιώντας το, δείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f \, d\mu$$

είναι συνεχής.
(β) Έστω A μη κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) < \infty$. Δείξτε ότι

$$\mu(A) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu : f \text{ συνεχής και } 0 \leq f \leq \chi_A \right\}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \left(\frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus A)}{1 + \operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus A)} \right)^{1/n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Καλή Επιτυχία!