Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue
10 Μαρτίου 2012

1. Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $\|s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \to 0$ καθώς το $n \to \infty$ και συμπεράνατε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

5. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν $E_1, \ldots, E_n$ είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με $\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) > n-1$ τότε $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) > 0$.

(β) Αν A είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με $\mu(A) = 1$, τότε το A είναι πυκνό στο $[0,1]$.

(γ) Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη στο $(a, b-\epsilon)$ για κάθε $0 < \epsilon < b-a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a,b).

6. Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μετρήσιμα $E, F \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\mu(E \cap F) = 0$. Δείξτε ότι $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

8. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f < \varepsilon$.

(β) Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $E_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$. Δείξτε ότι $n\mu(E_n) \to 0$.

Καλή Επιτυχία!