Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue
21 Ιουνίου 2011

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι οι Cesàro μέσοι της $S[f]$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|\sigma_n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty.$$

3. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \leq C \log(1+n) \|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n.

4. Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε την συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το σύνολο $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

6. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$ και $\sup\{f(x) : x \in E\} < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

7. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, dt = 1.$$

Δείξτε ότι $\alpha_n \leq C(n+1)$ για κάποια σταθερά $C > 0$ και συμπεράνατε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων.
(β) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, αποδείξτε πλήρως ότι

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

8. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

9. (α) Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(β) Έστω $A \subseteq [a, b]$. Δείξτε ότι $\mu^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

10. (α) Έστω $k \leq n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$. Αν $\mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n) \geq k$, δείξτε ότι υπάρχουν δείκτες $i_1 < \cdots < i_k$ στο $\{1, \ldots, n\}$ ώστε

$$E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} \neq \emptyset.$$

(β) Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

Καλή Επιτυχία!