Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδια 4 και 5

(Παραδίδετε δώδεκα από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 6 Ιουνίου 2021)

1. (α) Να υπολογιστεί η σειρά Fourier των συναρτήσεων $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f = \chi_{[0,\pi]} - \chi_{[-\pi,0)} \quad \text{και} \quad g(t) = \sin^2 t + 2\cos t + 1.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην f σε κάθε $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ για $|x| \leqslant \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

3. Έστω $\alpha \notin \mathbb{Z}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cos(\alpha x)$ για $|x| \leqslant \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την αποδείξτε ότι

$$\pi \cot(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\alpha + k}.$$

4. Εκφράστε τη συνάρτηση $\cos x$ σαν σειρά ημιτόνων στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας υπολογίστε το

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}.$$

5. Έστω $0 < \alpha \leqslant \pi$ και $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)$.

(α) Αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{\alpha}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ ισχύει

$$\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\alpha)}{k^2}.$$

6. Έστω $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ με $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$ και $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |b_k| < \infty$. Ορίζουμε $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ και $g(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx}$.

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{m-k} b_k$ συγκλίνει για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|,$$

όπου $\gamma_m := \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{m-k} b_k$.

(β) Ορίζουμε $h(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{ikx}$. Αποδείξτε ότι $h(x)=f(x)g(x)$ και ότι

$$\|h\|_\infty \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}|b_k|.$$

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi]$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos^2(k_nx+t_n)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx.$$

8. Δίνονται $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$. Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ με $f(x)=\sum_{k=1}^n\epsilon_k e^{ikx}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in[0,2\pi]\}\geq\sqrt{n}.$$

9. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi\notin\mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f(x+k\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t)\,dt$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. [*Υπόδειξη.* Αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για την $f_n(t)=e^{int}$, $n\in\mathbb{Z}$.]

10. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x\in(0,2\pi)$,

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kx}{k}.$$

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ για $x\in[0,2\pi)$. Έστω x_n ο μικρότερος θετικός αριθμός στον οποίο η $s_n(f,x)$ έχει τοπικό μέγιστο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x_n)=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

11. Έστω $\sum_{k=-\infty}^\infty c_ke^{ikx}$ τριγωνομετρική σειρά και $s_n(x)=\sum_{k=-n}^n c_ke^{ikx}$, $n\in\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f\in C(\mathbb{T})$ και υπακολουθία $\{s_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ της $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε $\|f-s_{k_n}\|_\infty\to 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{Z}$,

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx.$$

12. Αποδείξτε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ισχύει η ταυτότητα

$$\pi b_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/n}\left[f\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)-f\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}+\theta\right)\right]\sin n\theta\,d\theta.$$

για κάθε $n\geqslant 1$ και συμπεράνατε ότι αν η f είναι φθίνουσα στο $(0,2\pi)$ τότε $b_n\geqslant 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

13. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cos(kx), \qquad 0 < x < \pi$$

όπου

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{(k-1)\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, υπολογίστε το

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

14. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική φραγμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Ισχύει πάντα ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$; Ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$;

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $a > \frac{1}{2}$ ισχύει $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k^a} < \infty$.

15. (α) Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.

16. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη 2π-περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι αύξουσα και μη αρνητική στο $[-\pi, \pi)$. Αποδείξτε ότ υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_k(f)| \leqslant \frac{M}{k}$ και $|b_k(f)| \leqslant \frac{M}{k}$ για κάθε $k \geqslant 1$.

17. Ορίζουμε $K_n(x) = 2F_{2n}(x) - F_n(x)$, όπου F_m είναι ο m-οστός πυρήνας του Féjer. Αποδείξτε ότι:

$$\widehat{K_n}(k) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } |k| \leqslant n-1 \\ 2 - \frac{|k|}{n} & , \text{ αν } n \leqslant |k| \leqslant 2n-1 \\ 0 & , \text{ αν } |k| \geqslant 2n. \end{cases}$$

(β) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα $p_n(f) := f * K_n$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\|p_n\|_1 \leqslant 3\|f\|_1, \qquad \widehat{p_n}(k) = \widehat{f}(k) \text{ αν } |k| \leqslant n-1, \qquad \widehat{p_n}(k) = 0 \text{ αν } |k| \geqslant 2n.$$

(γ) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\|f - p_n(f)\|_\infty \to 0$.

18. (α) Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

19. Έστω $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} < \cdots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} e^{is_n x}.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_{k^2}(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$ τότε

$$\left| f_m(x) - \frac{k^2}{m} f_{k^2}(x) \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

(γ) Αποδείξτε ότι $f_m(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

20. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

αποδείξτε ότι $s_n(f, x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση, με σειρά Fourier

$$S(f, x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))$$

για κάποια ακολουθία $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ φυσικών αριθμών που ικανοποιούν την $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \gamma$ για κάποιον $\gamma > 1$ και κάθε $k \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι $s_n(f, x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.