Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 10 Απριλίου 2021)

1. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} < +\infty$. Αν $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\int_0^1 f_n \, d\lambda = a_n$, αποδείξτε ότι: σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) \leqslant \sqrt{a_n}$ για κάθε $n \geqslant n_x$.

2. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η δείκτρια συνάρτηση χ_E είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων αν και μόνο αν το E είναι ταυτόχρονα G_δ και F_σ σύνολο.

3. (α) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(G) = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : 0 \leqslant f \leqslant \chi_G, f \text{ συνεχής} \right\}.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τις $f_n(x) = \left(\frac{d(x,G^c)}{1+d(x,G^c)}\right)^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.]

(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(F) = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : f \geqslant \chi_F, f \text{ συνεχής} \right\}.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε, πάλι, κατάλληλες f_n.]

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $g_t(x) = f(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\int_{\mathbb{R}} g_t \, d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$.
[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε το πρώτα για απλές ολοκληρώσιμες f.]

(β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n^{-\alpha} |f(nx)| \, d\lambda(x) < +\infty$$

και $\frac{f(nx)}{n^\alpha} \to 0$ σχεδόν παντού.

5. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$, και $f : A \to [0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $G : (0,\infty) \to [0,\infty)$ με

$$G(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} k\varepsilon \cdot \lambda(\{x \in A : k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon\}).$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} G(\varepsilon) = \int_A f \, d\lambda$.

(β) Έστω B μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(B) < \infty$, και $g : B \to [0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_n := \{x \in B : |g(x)| \geqslant n\}$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty$.

6. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty (1+(x/n))^{-n} \sin(x/n)\, d\lambda(x)$.

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\, d\lambda(x)$.

7. Η συνάρτηση Γάμμα $\Gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x).$$

[*Υπόδειξη:* Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.]

9. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$. Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0,+\infty)$ και όχι το $[0,1]$.

10. Έστω $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και για κάθε $x \in [0,1]$, και

$$\int_E g_n(x)\, d\lambda(x) \longrightarrow 0$$

για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$. Αποδείξτε ότι: για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(x) g_n(x)\, d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$