Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (605)

Εξετάσεις 27 Ιουνίου 2017

1. **(α)** Να υπολογισθεί η σειρά Fourier των συναρτήσεων $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = t \quad \text{και} \quad g(t) = \sin^2 t.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. **(α)** Αν $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις κλάσεως $\mathcal{L}^2$ με τους ίδιους συντελεστές Fourier, πώς σχετίζονται οι f και g;
Τι συμβαίνει αν είναι και οι δύο συνεχείς και 2π-περιοδικές;

(β) Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής και 2π-περιοδική. Αν

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, δείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

3. **(α)** Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι $\lim_{k \to +\infty} \hat{f}(k) = 0$.

(β) Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει όταν η $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1$.

4. **(α)** Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\sup_{N \in \mathbb{N}} \int_{-N}^{N} |f(t)| dt < \infty$, δείξτε ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και ότι $\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f(t) dt$.

(β) Αν $f(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, δείξτε ότι η f είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^+$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της.

5. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim_n f_n(t)$ υπάρχει. Διατυπώστε δύο συνθήκες για την ακολουθία (f_n) κάθε μια από τις οποίες εξασφαλίζει ότι

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n d\lambda.$$

Με παραδείγματα δείξτε ότι οι συνθήκες αυτές δεν μπορούν να παραλειφθούν.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Αν η f είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\int_{[a,b]} |f|^2 d\lambda < \infty$. Αν $\int_{[a,b]} |f|^2 d\lambda < \infty$, δείξτε ότι $\int_{[a,b]} |f| d\lambda < \infty$ (όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$). Εξετάστε αν ισχύουν τα παραπάνω για το $\mathbb{R}$ στη θέση του $[a, b]$.

7. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty], n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο $L = \{x \in A : \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_n \text{ συγκλίνει}\}$ είναι μετρήσιμο.

(β) Βρείτε μια αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η οποία να συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = x, x \in [0, 1]$.

Να διατυπώνετε με ακρίβεια τους ορισμούς και τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε.

Να γραφούν πέντε θέματα.

Καλή επιτυχία!