Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 1/7/2015

1. (1.5 μον.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

(γ) Υπάρχει συμπαγές σύνολο K με $K \subseteq A$ και $\lambda(K) = \lambda(A)/2$.

2. (1 μον.) Θέτουμε $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ είναι μια *πεπερασμένη* οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} R_j$, τότε $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geqslant 1$.

3. (1.5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geqslant n\}$ τότε

$$\int_{E_n} |f| \, d\lambda \to 0 \quad \text{και} \quad n\,\lambda(E_n) \to 0.$$

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E |f| \, d\lambda < \varepsilon$.

4. (1 μον.) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5. (1 μον.) Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$ και έστω $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n^{-\alpha} |f(nx)| \, d\lambda(x) < +\infty$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{f(nx)}{n^\alpha} \to 0$$

σχεδόν παντού.

6. (1.5 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(β) Αποδείξτε ότι η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ εξασφαλίζεται αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.

7. (1.5 μον.) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,d\lambda(t).$$

(β) Για κάθε $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n}=0.$$

8. (1 μον.) Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A\subseteq\mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k \widehat{f}(k)\int_A e^{ikt}d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\,d\lambda(t)$.

9. (1 μον.) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\|f-s_n(f)\|_\infty\leqslant\sum_{|k|>n}\frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|}.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\|f-s_n(f)\|_\infty=0.$$

10. (1 μον.) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(\pi-x)^2$ στο $[0,2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S(f,x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Καλή Επιτυχία!