Αριθμοί Pisot και σύνολα μοναδικότητας

Ραφαήλ Καρτσιούκας, Δημήτρης Νταλαμπίρας, Βαγγέλης Συρίγος

Περίληψη

Αποδεικνύουμε το θεώρημα Salem-Zygmund για τα σύνολα μοναδικότητας τριγωνομετρικών σειρών: αν το $E(\xi)$ είναι ένα συμμετρικό τέλειο σύνολο στο $(0, 2\pi)$ με σταθερή αναλογία τομής ξ, τότε το $E(\xi)$ είναι σύνολο μοναδικότητας αν και μόνον αν ο $1/\xi$ είναι αριθμός Pisot.

1 Εισαγωγή

Αρχικά, θυμίζουμε μερικούς συμβολισμούς. Για κάθε πραγματικό αριθμό α, θα συμβολίζουμε με α το ακέραιο μέρος του, δηλαδή τον ακέραιο αριθμό για τον οποίο ισχύει

$$[\alpha] \leqslant \alpha < \alpha + 1.$$

Με (α) θα συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του αριθμού. Δηλαδή,

$$[\alpha] + (\alpha) = \alpha.$$

Θα συμβολίζουμε με $\|\alpha\|$ την απόλυτη τιμή της διαφοράς του α από τον πλησιέστερο ακέραιο. Έτσι,

$$\|\alpha\| = \min\{|\alpha - n| : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Αν m είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στον α, θα γράφουμε επίσης

$$\alpha = m + \{\alpha\},$$

δηλαδή ο $\|\alpha\|$ είναι η απόλυτη τιμή του $\{\alpha\}$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε μια ακολουθία αριθμών $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ με την ιδιότητα

$$0 \leqslant u_j < 1.$$

Έστω Δ ένα διάστημα που περιέχεται στο $(0, 1)$, και έστω $|\Delta|$ το μήκος του. Υποθέτουμε ότι ανάμεσα στους N πρώτους όρους της ακολουθίας, υπάρχουν $\nu(\Delta, N)$ από αυτούς που περιέχονται στο διάστημα Δ. Τότε, αν για κάθε σταθερό διάστημα Δ έχουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\nu(\Delta, N)}{N} = |\Delta|,$$

λέμε ότι η ακολουθία $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη. Αυτό σημαίνει, στο περίπου, ότι κάθε υποδιάστημα του $(0,1)$ περιέχει τη σωστή αναλογία σημείων.

Θα επεκτείνουμε τώρα αυτόν τον ορισμό στην περίπτωση που οι αριθμοί u_j δε βρίσκονται ανάμεσα στο 0 και το 1. Για αυτούς τους αριθμούς, θεωρούμε τα κλασματικά μέρη, (u_j), των u_j, και λέμε ότι η ακολουθία $\{u_n\}_n$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1, αν η ακολουθία των κλασματικών μερών, $(u_1), (u_2), \ldots, (u_n), \ldots$, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη όπως ορίστηκε παραπάνω. Η έννοια της ομοιόμορφης κατανομής (η οποία μπορεί να επεκταθεί στις πολλές διαστάσεις), οφείλεται στον H. Weyl, ο οποίος σε μία δημοσίευσή του έδωσε επίσης και ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για το αν μια ακολουθία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1.

Χωρίς περαιτέρω επεξήγηση, δεχόμαστε τα ακόλουθα.

(α) Αν ξ είναι ένας άρρητος αριθμός, τότε η ακολουθία των κλασματικών μερών $(n\xi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη. Αυτό προφανώς δεν ισχύει αν ο ξ είναι ρητός αριθμός.

(β) Έστω $P(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο, όπου τουλάχιστον ένας συντελεστής a_j, με $j > 0$, είναι άρρητος αριθμός. Τότε η ακολουθία $P(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας δίνουν πληροφορίες για την ομοιόμορφη κατανομή modulo 1 των αριθμών $f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, όταν το $f(x)$ αυξάνει στο ∞ ως προς x, όχι γρηγορότερα από ένα πολυώνυμο.

Έχουμε επίσης πληροφορίες για τη συμπεριφορά - από την άποψη της ομοιόμορφης κατανομής - συναρτήσεων $f(n)$ που αυξάνουν στο ∞ πιο αργά από το n. Γνωρίζουμε, για παράδειγμα, ότι η ακολουθία an^a ($a > 0$, $0 < a < 1$) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1. Το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία $a \log^a n$, αν $a > 1$, αλλά δεν ισχύει για $a < 1$.

Ωστόσο, δε γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα, όταν ο ρυθμός αύξησης της $f(n)$ είναι εκθετικός. Ο Koksma απέδειξε ότι η ω^n είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1 για σχεδόν όλα (με την έννοια του μέτρου Lebesgue) τα $\omega > 1$, αλλά τίποτα δεν είναι γνωστό για συγκεκριμένες τιμές του ω. Έτσι, δε γνωρίζουμε ακόμα και αν ακολουθίες απλές, όπως η e^n ή η $(3/2)^n$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες modulo 1. Δεν γνωρίζουμε ακόμα και αν είναι παντού πυκνές (modulo 1) στο διάστημα $(0,1)$.

Είναι φυσικό λοιπόν να στραφούμε στην αντίθετη κατεύθυνση και να προσπαθήσουμε να μελετήσουμε εκείνα τα $\omega > 1$, για τα οποία η ω^n είναι «κακώς» κατανεμημένη. Εκτός από την περίπτωση που ο ω είναι ένας ακέραιος αριθμός (στην οποία, για κάθε n, το ω^n συγκλίνει προφανώς στο 0 modulo 1), υπάρχουν και λιγότερο τετριμμένα παραδείγματα κατανομών, που δεν είναι ομοιόμορφες. Για παράδειγμα, παίρνουμε τον δευτεροβάθμιο αλγεβρικό ακέραιο

$$\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ με αλγεβρικό συζυγή τον } \ \omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Εδώ, ο $\omega^n + (\omega')^n$ είναι ένας ακέραιος αριθμός, άρα

$$\omega^n + (\omega')^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1).$$

Αλλά $|\omega'| < 1$, και έτσι $(\omega')^n \to 0$, όταν $n \to \infty$, που σημαίνει ότι $\omega^n \to 0 \,(\mathrm{mod}\ 1)$. Με άλλα λόγια, η ακολουθία ω^n έχει(modulo 1) μόνο ένα σημείο συσσώρευσης, το 0. Αυτήν την ιδιότητα την έχουν και κάποιοι άλλοι αλγεβρικοί ακέραιοι, όπως θα δούμε.

Δίνουμε, τώρα, μερικούς ορισμούς οι οποίοι θα μας χρησιμεύσουν στη συνέχεια.

Ορισμός 1.1. Ένα πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ λέγεται *μονικό*, αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι μονάδα, δηλαδή αν $a_n = 1$.

Ορισμός 1.2. Ένας αριθμός λέγεται *αλγεβρικός ακέραιος* αν είναι ρίζα ενός μονικού πολυωνύμου με συντελεστές από το $\mathbb{Z}$.

- Αν ο α είναι αλγεβρικός αριθμός, τότε υπάρχει $m \geqslant 0$ τέτοιος ώστε ο $m\alpha$ να είναι αλγεβρικός ακέραιος.

- Αν ο θ είναι αλγεβρικός ακέραιος βαθμού n, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο του θ (που έχει βαθμό n), έχει ακέραιους συντελεστές. Οι άλλες ρίζες του είναι οι συζυγείς του θ, που είναι και αυτοί αλγεβρικοί ακέραιοι.

Κάθε συμμετρική συνάρτηση του θ και των συζυγών του είναι ακέραιος αριθμός. Αυτό ισχύει, ιδιαίτερα, και για το γινόμενο του θ και των συζυγών του, και αυτός είναι ο λόγος που είναι αδύνατον και ο θ και οι συζυγείς του να έχουν όλοι μέτρο μικρότερο του 1. Ο αλγεβρικός ακέραιος θ ονομάζεται *μονάδα* αν και ο $1/\theta$ είναι αλγεβρικός ακέραιος.

Στη συνέχεια περιγράφουμε, τον τρόπο κατασκευής των συμμετρικών τέλειων συνόλων με σταθερή αναλογία τομής. Θεωρούμε ένα $0 < \xi < 1/2$ και διαιρούμε το αρχικό διάστημα, ας πούμε το $(0, 2\pi)$, σε τρία κομμάτια μήκους $2\pi\xi, 2\pi(1-2\xi)$ και $2\pi\xi$ αντίστοιχα. Αφαιρούμε το κέντρο του ανοιχτού διαστήματος (το «μαύρο» διάστημα). Έχουν απομείνει τώρα δύο διαστήματα(τα «άσπρα») στα οποία εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία με λόγο $2\pi\xi^2$. Στο k-οστό βήμα έχουν απομείνει 2^k «λευκά» διαστήματα, το καθένα μήκους $2\pi\xi^k$. Συμβολίζουμε με E_k το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε αυτά τα 2^k άσπρα κλειστά διαστήματα. Τα αριστερά άκρα τους δίνονται από την

$$x = 2\pi[\varepsilon_1(1-\xi) + \varepsilon_2\xi(1-\xi) + \cdots + \varepsilon_k\xi^{k-1}(1-\xi)] \tag{1.1}$$

όπου $\varepsilon_i = 0$ ή 1. Η τομή όλων των E_k είναι ένα τέλειο σύνολο E μέτρου ίσου με

$$2\pi \lim_{k\to\infty}(2^k\xi^k) = 0,$$

τα σημεία του οποίου δίνονται από την άπειρη σειρά

$$x = 2\pi[\varepsilon_1(1-\xi) + \varepsilon_2\xi(1-\xi) + \cdots + \varepsilon_k\xi^{k-1}(1-\xi) + \cdots] \tag{1.2}$$

όπου $\varepsilon_i = 0$ ή 1.

2 Αριθμοί Pisot

Ορισμός 2.1. Έστω θ ένας αλγεβρικός ακέραιος, τέτοιος ώστε όλοι οι αλγεβρικοί συζυγείς του (όχι ο ίδιος ο θ) να έχουν μέτρο μικρότερο του 1. Τότε θα λέμε ότι ο θ είναι *αριθμός Pisot*.

Θεώρημα 2.2. *Αν ο θ είναι αριθμός Pisot, τότε η θ^n τείνει στο 0 (modulo 1) όταν $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο θ είναι βαθμού k, και έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ οι συζυγείς του. Τότε ο αριθμός $\theta^n + a_1^n + \cdots + a_{k-1}^n$ είναι ακέραιος αριθμός. Αφού $|a_j| < 1$ για όλα τα j, έχουμε ότι, θέτοντας ρ τον μεγαλύτερο από τους $|a_j|$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$|a_1|^n + \cdots + |a_{k-1}|^n < (k-1)\rho^n$$

και $\rho < 1$, και έτσι, αφού $\theta^n + a_1^n + \cdots + a_{k-1}^n \equiv 0 \pmod 1$, έχουμε ότι (modulo 1) $\theta^n \to 0$, και μάλιστα ότι τείνει στο 0, με τον ίδιο τρόπο, όπως ο γενικός όρος μιας συγκλίνουσας γεωμετρικής προόδου. Με το συμβολισμό της εισαγωγής, γράφουμε $\|\theta^n\| \to 0$. □

Σχόλιο. Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί με τον εξής τρόπο. Έστω λ ένας αλγεβρικός ακέραιος στο σώμα που είναι και ο θ, και έστω $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1}$ οι συζυγείς του. Τότε, ο

$$\lambda\theta^n + \mu_1 a_1^n + \cdots + \mu_{k-1} a_{k-1}^n$$

είναι ξανά ακέραιος αριθμός, και συνεπώς το $\|\lambda\theta^n\|$ τείνει επίσης στο 0, όταν $n \to \infty$, όπως μπορούμε να δείξουμε με ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό της προηγούμενης απόδειξης. Περαιτέρω γενικεύσεις είναι δυνατές και για άλλους αριθμούς λ.

Μέχρι τώρα, δεν έχουμε κατασκευάσει κανέναν άρρητο αριθμό Pisot, εκτός από τον τετραγωνικό άρρητο $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Φυσικά, όλοι οι ακέραιοι αριθμοί είναι τετριμμένα αριθμοί Pisot.) Είναι ενδιαφέρον, συνεπώς, να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. *Σε κάθε πραγματικό αλγεβρικό σώμα, υπάρχουν αριθμοί Pisot.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ είναι μια ακέραια βάση του σώματος, και έστω $\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \ldots, \omega_k^{(i)}$, για $i = 1, 2, \ldots, k-1$ οι συζυγείς αριθμοί των $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. Από το θεώρημα του Minkowski για γραμμικές μορφές, μπορούμε να βρούμε ακεραίους αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_k$, όχι όλους μηδέν, έτσι ώστε

$$|x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_k\omega_k| \leqslant A$$

και

$$|x_1\omega_1^{(i)} + x_2\omega_2^{(i)} + \cdots + x_k\omega_k^{(i)}| \leqslant \rho < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

με την υπόθεση ότι

$$A\rho^{k-1} \geqslant \sqrt{D},$$

όπου D είναι η διακρίνουσα του σώματος. Για A αρκετά μεγάλο, αυτό είναι πάντοτε εφικτό, και συνεπώς ο ακέραιος του σώματος

$$\theta = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_k\omega_k$$

είναι αριθμός Pisot. □

2.1 Χαρακτηρισμός των αριθμών Pisot

Η θεμελιώδης ιδιότητα των αριθμών Pisot εγείρει το ακόλουθο ερώτημα: Έστω ότι $\theta > 1$ είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $\|\theta^n\| \to 0$ όταν $n \to \infty$ (ή, ακόμα γενικότερα, ο θ είναι τέτοιος ώστε να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ, για τον οποίο να ισχύει ότι $\|\lambda\theta^n\| \to 0$ όταν $n \to \infty$). Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο θ είναι αριθμός Pisot;

Αυτό το σημαντικό πρόβλημα παραμένει αναπάντητο. Ωστόσο, η απάντηση είναι καταφατική, αν επιπρόσθετα ικανοποιείται μία από τις παρακάτω συνθήκεσ:

(α) Η ακολουθία $\|\lambda\theta^n\|$ τείνει στο μηδέν αρκετά γρήγορα, ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda\theta^n\|^2$$

να συγκλίνει.

(β) Γνωρίζουμε από πριν ότι ο θ είναι αλγεβρικός αριθμός.

Με άλλα λόγια, έχουμε τα παρακάτω δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 2.4. *Αν ο $\theta > 1$ είναι τέτοιος ώστε να υπάρχει λ με*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda\theta^n\|^2 < \infty,$$

τότε ο θ είναι αριθμός Pisot, και ο λ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός του σώματος του θ.

Θεώρημα 2.5. *Αν ο $\theta > 1$ είναι αλγεβρικός αριθμός τέτοιος ώστε να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ με την ιδιότητα $\|\lambda\theta^n\| \to 0$ όταν $n \to \infty$, τότε ο θ είναι αριθμός Pisot, και ο λ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός και ανήκει στο σώμα του θ.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.4 βασίζεται σε μια σειρά από λήμματα.

Λήμμα 2.6. *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η δυναμοσειρά*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2.1}$$

να αναπαριστά μια ρητή συνάρτηση

$$\frac{P(z)}{Q(z)}$$

(όπου P και Q πολυώνυμα) είναι όλοι οι συντελεστές να ικανοποιούν μια αναδρομική σχέση,

$$a_0 c_m + a_1 c_{m+1} + \cdots + a_p c_{m+p} = 0$$

για κάθε $m \geqslant m_0$, όπου ο ακέραιος p και οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_p$ είναι ανεξάρτητοι του m.

Λήμμα 2.7 (λήμμα του Fatou)**.** *Αν στη δυναμοσειρά* (2.1) *οι συντελεστές c_n είναι ακέραιοι αριθμοί και αν η δυναμοσειρά* (2.1) *αναπαριστά μια ρητή συνάρτηση, τότε*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

όπου το P/Q είναι ανάγωγο, τα P και Q είναι πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές, και $Q(0) = 1$.

Λήμμα 2.8 (Kronecker)**.** *Η δυναμοσειρά* (2.1) *αναπαριστά μια ρητή συνάρτηση αν και μόνον αν οι ορίζουσες*

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{2m} \end{vmatrix}$$

είναι όλες μηδέν για $m \geqslant m_1$.

Λήμμα 2.9 (Hadamard)**.** *Έστω ότι η ορίζουσα*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & c_m \\ a_2 & b_2 & \cdots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_{m+1} & \cdots & c_{2m} \end{vmatrix}$$

έχει στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς. Τότε

$$|D|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \right) \cdots \left(\sum_{j=1}^{n} |l_j|^2 \right).$$

Δεν θα αποδείξουμε το Λήμμα 2.6, ούτε το Λήμμα 2.9. Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.9 μόνο στην περίπτωση που τα στοιχεία του D είναι πραγματικοί αριθμοί. Μάλιστα, τότε η απόδειξη είναι αρκετά ευκολότερη. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το Λήμμα 2.7 και το Λήμμα 2.8.

Απόδειξη του Λήμματος 2.7. Ξεκινάμε με έναν ορισμό: Μια τυπική δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

με ακέραιους συντελεστές θα λέγεται πρωταρχική, αν δεν υπάρχει ακέραιος $d > 1$ που να διαιρεί όλους τους συντελεστές.

Δείχνουμε πρώτα ότι αν δύο σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

είναι και οι δύο πρωταρχικές, τότε το τυπικό γινόμενό τους,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{όπου} \;\; c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu},$$

είναι επίσης πρωταρχική. Έστω ότι ο πρώτος αριθμός p διαιρεί όλους τους c_n. Αφού ο p δεν μπορεί να διαιρεί όλους τους a_n, υποθέτουμε ότι

$$a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \equiv 0 \pmod p), \qquad a_k \not\equiv 0 \pmod p).$$

Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c_k &\equiv a_k b_0 \pmod p), && \text{από όπου} \;\; b_0 \equiv 0 \pmod p),\\ c_{k+1} &\equiv a_k b_1 \pmod p), && \text{από όπου} \;\; b_1 \equiv 0 \pmod p),\\ c_{k+2} &\equiv a_k b_2 \pmod p), && \text{από όπου} \;\; b_2 \equiv 0 \pmod p), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής, και άρα η

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

δεν θα ήταν πρωταρχική.

Τώρα, θα αποδείξουμε το λήμμα. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές c_n είναι ακέραιοι αριθμοί και ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

αναπαριστά μια ρητή συνάρτηση

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m}{q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n},$$

την οποία υποθέτουμε ανάγωγη. Αφού το πολυώνυμο $Q(z)$ είναι πλήρως καθορισμένο (εκτός από μια σταθερά), οι εξισώσεις

$$q_0 c_s + q_1 c_(s-1) + \cdots + q_n c_{s-n} = 0 \qquad (s > m)$$

καθορίζουν πλήρως τους συντελεστές q_j (εκτός από μια σταθερά). Αφού οι c_s είναι ρητοί, υπάρχει λύση έτσι ώστε όλοι οι q_j να είναι ακέραιοι αριθμοί, και έτσι έπεται ότι οι p_i είναι επίσης ακέραιοι αριθμοί.

Τώρα θα πρέπει να δείξουμε ότι $q_0 = \pm 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κανένας ακέραιος $d > 1$ δεν διαιρεί όλους τους p_i και όλους τους q_j. (Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης για όλους τους συντελεστές c_n, δηλαδή η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ είναι πρωταρχική.) Το πολυώνυμο Q είναι πρωταρχικό, διότι διαφορετικά αν ένας d διαιρούσε τον q_j για κάθε j, τότε θα είχαμε ότι

$$f\frac{Q}{d} = \frac{P}{d}$$

και ο d θα διαιρούσε όλους τους p_i, σε αντίθεση με τις υποθέσεις μας.

Τώρα, έστω U και V πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές, έτσι ώστε

$$PU + QV = m \neq 0,$$

όπου m ακέραιος. Τότε,

$$m = Q(Uf + V).$$

Αφού το Q είναι πρωταρχικό, το $Uf + V$ δεν μπορεί να είναι πρωταρχικό, αφού το m δεν είναι πρωταρχικό εκτός και αν $|m| = 1$. Άρα, οι συντελεστές του $Uf + V$ διαιρούνται από το m. Αν γ_0 είναι ο σταθερός όρος του $Uf + V$, θα έχουμε ότι

$$m = q_0 \gamma_0,$$

και έτσι, αφού το m διαιρεί το γ_0, προκύπτει ότι $q_0 = \pm 1$, το οποίο αποδεικνύει το Λήμμα 2.7. □

Απόδειξη του Λήμματος 2.8. Η αναδρομική σχέση του Λήμματος 2.6,

$$a_0 c_m + a_1 c_{m+1} + \cdots + a_p c_{m+p} = 0, \tag{2.2}$$

για κάθε $m \geqslant m_0$, όπου ο ακέραιος p και οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_p$ είναι ανεξάρτητοι του m, δείχνει ότι στην ορίζουσα

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{2m} \end{vmatrix}$$

όπου $m \geqslant m_0+p$, οι στήλες $m_0, m_0+1, \ldots, m_0+p$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, άρα $\Delta_m = 0$.

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι αν $\Delta_m = 0$ για $m \geqslant m_1$, τότε η c_n ικανοποιεί μια αναδρομική σχέση της μορφής (2.2). Αν συμβαίνει αυτό, τότε το Λήμμα 2.8 έπεται από το Λήμμα 2.6. Έστω p η πρώτη τιμή του m για την οποία $\Delta_m = 0$. Τότε η τελευταία στήλη του Δ_p είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των πρώτων p στηλών, δηλαδή

$$L_{j+p} = a_0c_j + a_1c_{j+1} + \cdots + a_{p-1}c_{j+p-1} + c_{j+p} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, p.$$

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι $L_{j+p} = 0$, για κάθε τιμή του j. Έστω ότι

$$L_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \qquad (m > p).$$

Αν δείξουμε ότι $L_{m+p} = 0$, τότε θα έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό μας επαγωγικά. Τώρα γράφουμε

$$\Delta_m = \left|\begin{array}{c|ccc} \Delta_{p-1} & c_p & \cdots & c_m \\ \hline c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & c_{p+m} & \cdots & c_{2m} \end{array}\right|$$

και προσθέτουμε σε κάθε στήλη $\geqslant p$ ένα γραμμικό συνδυασμό των p προηγούμενων στηλών με συντελεστές τους $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$. Έτσι,

$$\Delta_m = \left|\begin{array}{c|ccc} \Delta_{p-1} & L_p & \cdots & L_m \\ \hline c_p & L_{p+1} & \cdots & L_{p+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & L_{p+m} & \cdots & L_{2m} \end{array}\right|$$

και συνεπώς, αφού όλα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο είναι μηδέν, έχουμε

$$\Delta_m = (-1)^{p+m}\Delta_{p-1}(L_{p+m})^{m-p+1}.$$

Αφού $\Delta_m = 0$, έχουμε ότι $L_{p+m} = 0$, το οποίο θέλαμε να δείξουμε, και έτσι το Λήμμα 2.8 αποδείχθηκε. $\square$

Τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.4.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4. Γράφουμε

$$\lambda\theta^n = a_n + \varepsilon_n,$$

όπου a_n είναι ένας ακέραιος αριθμός και $|\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{2}$, δηλαδή $|\varepsilon_n| = \|\lambda\theta^n\|$. Συνεπώς, η υπόθεσή μας είναι ότι η σειρά $\sum \varepsilon_n^2$ συγκλίνει.

Το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε με εφαρμογή του Λήμματος 2.8, ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

αναπαριστά μια ρητή συνάρτηση. Θεωρώντας την ορίζουσα

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

θα αποδείξουμε ότι $\Delta_n = 0$ για κάθε n αρκετά μεγάλο. Γράφοντας

$$\eta_m = a_m - \theta a_{m-1} = \theta\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m$$

έχουμε

$$\eta_m^2 < (\theta^2 + 1)(\varepsilon_{m-1}^2 + \varepsilon_m^2).$$

Μετασχηματίζοντας τις στήλες του Δ_n, αρχίζοντας με την τελευταία, έχουμε

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \\ a_1 & \eta_2 & \dots & \eta_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \eta_{n+1} & \cdots & \eta_{2n} \end{vmatrix}$$

και από το Λήμμα 2.8,

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &\leqslant \left(\sum_{m=0}^{n} a_m^2\right)\left(\sum_{m=1}^{n+1} \eta_m^2\right)\left(\sum_{m=n}^{2n} \eta_m^2\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{m=0}^{n} a_m^2\right) R_1 R_2 \cdots R_n, \end{aligned}$$

όπου το R_h συμβολίζει το υπόλοιπο της συγκλίνουσας σειράς

$$\sum_{m=h}^{\infty} \eta_m^2.$$

Αλλά, από τον ορισμό του a_m,

$$\sum_{m=0}^{n} a_m^2 < C\theta^{2n},$$

όπου η σταθερά $C = C(\lambda, \theta)$ εξαρτάται μόνον από τα λ και θ.

Συνεπώς,

$$\Delta_n^2 \leqslant C \prod_{h=1}^{n} (\theta^2 R_h),$$

και αφού $R_h \to 0$ για $h \to \infty$, έχουμε $D_n \to 0$ όταν $n \to \infty$, το οποίο αποδεικνύει, αφού ο Δ_n είναι ακέραιος αριθμός, ότι ο Δ_n είναι ίσος με μηδέν όταν το n είναι μεγαλύτερο από κάποιον συγκεκριμένο ακέραιο.

Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad \text{(ανάγωγη)}$$

όπου, από το Λήμμα 2.7, τα P και Q είναι πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές και $Q(0) = 1$. Γράφοντας

$$Q(z) = 1 + q_1 z + \cdots + q_k z^k,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \theta^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= \frac{\lambda}{1 - \theta z} - \frac{P(z)}{1 + q_1 z + \cdots + q_k z^k}. \end{aligned}$$

Αφού η ακτίνα σύγκλισης της

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$$

είναι τουλάχιστον 1, βλέπουμε ότι το

$$Q(z) = 1 + q_1 z + \cdots + q_k z^k$$

έχει μόνο μία ρίζα μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, και αυτή είναι το $1/\theta$. Επίσης, αφού $\sum \varepsilon_n^2 < \infty$, η $f(z)$ δεν έχει πόλο μέτρου 1, το $Q(z)$ έχει μόνο μία ρίζα, το $1/\theta$, με μέτρο μικρότερο του 1, και όλες οι άλλες ρίζες του έχουν μέτρο γνήσια μεγαλύτερο του 1. Το αντίστροφο πολυώνυμο,

$$z^k + q_1 z^{k-1} + \cdots + q_k,$$

έχει μόνο μία ρίζα, το θ, με μέτρο μεγαλύτερο του 1 και όλες οι άλλες ρίζες βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $\{z : |z| < 1\}$. Άρα, το θ είναι, με βάση τον ορισμό, ένας αριθμός Pisot.

Αφού

$$-\frac{\lambda}{\theta} = \frac{P(1/\theta)}{Q'(1/\theta)},$$

το λ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός που ανήκει στο σώμα του θ.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5. Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος, ξαναγράφουμε

$$\lambda \theta^n = a_n + \varepsilon_n,$$

όπου a_n είναι ένας ακέραιος αριθμός και $|\varepsilon_n| = \|\lambda\theta^n\| \leqslant \frac{1}{2}$. Η υπόθεση εδώ είναι απλά ότι $\varepsilon_n \to 0$ όταν $n \to \infty$, χωρίς καμία υπόθεση σχετικά με την ταχύτητα με την οποία το ε_n τείνει στο μηδέν. Αλλά εδώ, υποθέτουμε εξ¨ αρχής ότι ο θ είναι αλγεβρικός αριθμός, και θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο θ είναι αριθμός Pisot.

Ξανά, το πρώτο βήμα θα είναι να δείξουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

αναπαριστά μια ρητή συνάρτηση. Αλλά εδώ, δεν θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.8. Έστω ότι

$$A_0 + A_1\theta + \cdots + A_k\theta^k = 0$$

είναι η εξίσωση με ακεραίους συντελεστές, η οποία ικανοποιείται από τον αλγεβρικό αριθμό θ. Έχουμε, για N θετικό ακέραιο αριθμό,

$$\lambda\theta^N(A_0 + A_1\theta + \cdots + A_k\theta^k) = 0,$$

και αφού

$$\lambda\theta^{N+p} = a_{N+p} + \varepsilon_{N+p},$$

έχουμε ότι

$$A_0 a_N + A_1 a_{N+1} + \cdots + A_k a_{N+k} = -(A_0\varepsilon_N + A_1\varepsilon_{N+1} + \cdots + A_k\varepsilon_{N+k}).$$

Αφού τα A_j είναι σταθεροί αριθμοί έχουμε ότι το δεύτερο μέλος τείνει στο μηδέν καθώς $N \to \infty$, και αφού το πρώτο μέλος είναι ένας ακέραιος αριθμός, έπεται ότι

$$A_0 a_N + A_1 a_{N+1} + \cdots + A_k a_{N+k} = 0$$

για κάθε $N \geqslant N_0$. Αυτή είναι μια αναδρομική σχέση που ικανοποιείται από τους συντελεστές a_n, και συνεπώς, από το Λήμμα 2.6, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

αναπαριστά μια ρητή συνάρτηση.

Από αυτό το σημείο και μετά, η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4. (Για να δείξουμε ότι το $f(z)$ δεν έχει πόλο μέτρου 1, η υπόθεση ότι $\varepsilon_n \to 0$ είναι αρκετή.) Έτσι, ο ισχυρισμός ότι ο θ είναι αριθμός Pisot αποδείχτηκε. □

Σημείωση 2.10. Μια δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ με $c_n = o(1)$ δεν μπορεί να έχει πόλο πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο πόλος είναι στο σημείο $z = 1$. Και έστω ότι το $z - r$ τείνει στο $1 - 0$ κατά μήκος του πραγματικού άξονα. Τότε, $|f(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = o((1-r)^(-1))$, το οποίο είναι αδύνατο, αν το $z = 1$ είναι πόλος.

2.2 Ένα ανοικτό πρόβλημα

Όπως τονίσαμε, πριν διατυπώσουμε τα Θεωρήματα 2.4 και 2.5, αν γνωρίζουμε μόνον ότι ο $\theta > 1$ είναι τέτοιος ώστε να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ με την ιδιότητα $\|\lambda\theta^n\| \to 0$ όταν $n \to \infty$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο θ είναι αριθμός Pisot. Μπορούμε να βγάλουμε αυτό το συμπέρασμα μόνον αν γνωρίζουμε είτε ότι $\sum \|\lambda\theta^n\|^2 < \infty$ είτε ότι ο θ είναι αλγεβρικός αριθμός. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα που παραμένει ανοικτό είναι το αν υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί θ, με την ιδιότητα $\|\lambda\theta^n\| \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Θα αποδείξουμε εδώ το μόνο γνωστό μας θεώρημα για τους αριθμούς θ για τους οποίους υπάρχει ένας αριθμός λ, με την ιδιότητα $\|\lambda\theta^n\| \to 0$ όταν $n \to \infty$ (χωρίς κάποια περαιτέρω υπόθεση).

Θεώρημα 2.11. *Το σύνολο των αριθμών θ που έχουν την παραπάνω ιδιότητα είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Γράφουμε ξανά
$$\lambda\theta^n = a_n + \varepsilon_n,$$
όπου a_n είναι ένας ακέραιος αριθμός και $|\varepsilon_n| = \|\lambda\theta^n\|$. Έχουμε
$$\begin{aligned} a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n} &= \frac{a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2}{a_n} \\ &= \frac{(\lambda\theta^n - \varepsilon_n)(\lambda\theta^{n+2} - \varepsilon_{n+2}) - (\lambda\theta^{n+1} - \varepsilon_{n+1})^2}{\lambda\theta^n - \varepsilon_n}, \end{aligned}$$
και ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι, αφού $\varepsilon_n \to 0$, η τελευταία ποσότητα τείνει στο μηδέν, καθώς $n \to \infty$. Άρα, για $n \geqslant n_0 = n_0(\lambda, \theta)$, έχουμε ότι
$$\left| a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right| < \frac{1}{2}.$$
Αυτό δείχνει ότι ο ακέραιος a_{n+2} προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τους δύο προηγούμενους ακεραίους a_n, a_{n+1}. Άρα, η άπειρη ακολουθία ακεραίων $\{a_n\}$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τους πρώτους $n_0 + 1$ όρους της ακολουθίας.

Αυτό δείχνει ότι το σύνολο όλων των πιθανών ακολουθιών $\{a_n\}$ είναι αριθμήσιμο, και αφού
$$\theta = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n},$$
τότε και το σύνολο όλων των πιθανών αριθμών θ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς το θεώρημα αποδείχτηκε. $\square$

Τελος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, αφού
$$\lambda = \lim_n \frac{a_n}{\theta^n},$$
το σύνολο των τιμών του λ είναι επίσης αριθμήσιμο.

3 Ιδιάζουσες συναρτήσεις

Με τον όρο *ιδιάζουσα συνάρτηση* θα εννοούμε σε ό,τι ακολουθεί μια φραγμένη, συνεχή και αύξουσα συνάρτηση της οποίας η παράγωγος μηδενίζεται για σχεδόν όλες (με την έννοια του Lebesque) τις τιμές της πραγματικής μεταβλητής x.

Μια ευρεία κλάση ιδιαζουσών συναρτήσεων προκύπτει αν κατασκευάσουμε, ας πούμε στο $(0, 2\pi)$, ένα τέλειο σύνολο μέτρου μηδέν και θεωρήσουμε μια αύξουσα συνεχή συνάρτηση, η οποία είναι σταθερή σε κάθε διάστημα ξένο προς το σύνολο αυτό (αλλά όχι παντού).

Ένα πολύ ενδιαφέρον και απλό παράδειγμα τέλειων συνόλων δίνουν τα συμμετρικά τέλεια σύνολα με σταθερή αναλογία τομής. Θεωρούμε ένα $0 < \xi < 1/2$ και διαιρούμε το αρχικό διάστημα, έστω ας πούμε το $(0, 2\pi)$, σε τρία κομμάτια μήκους $2\pi\xi$, $2\pi(1-2\xi)$ και $2\pi\xi$ αντίστοιχα. Αφαιρούμε το κέντρο του ανοιχτού διαστήματος («μαύρο» διάστημα). Έχουν απομείνει τώρα δύο διαστήματα («άσπρα» διαστήματα) στα οποία εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία με μήκη $2\pi\xi^2$ και $2\pi\xi(1-2\xi)$. Στο k-οστό βήμα έχουν απομείνει 2^k «λευκά» διαστήματα, το καθένα μήκους $2\pi\xi^k$. Συμβολίζουμε με E_k το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε αυτά τα 2^k άσπρα κλειστά διαστήματα. Τα αριστερά άκρα τους δίνονται από την

$$x = 2\pi[\varepsilon_1(1-\xi) + \varepsilon_2\xi(1-\xi) + \cdots + \varepsilon_k\xi^{k-1}(1-\xi)], \tag{3.1}$$

όπου $\varepsilon_i = 0$ ή 1. Η τομή όλων των E_k είναι ένα τέλειο σύνολο E μέτρου ίσου με

$$2\pi \lim_{k\to\infty}(2^k\xi^k) = 0,$$

τα σημεία της οποίας δίνονται από την άπειρη σειρά:

$$x = 2\pi[\varepsilon_1(1-\xi) + \varepsilon_2\xi(1-\xi) + \cdots + \varepsilon_k\xi^{k-1}(1-\xi) + \cdots], \tag{3.2}$$

όπου $\varepsilon_i = 0$ ή 1.

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το κλασσικό τριαδικό σύνολο του Cantor αν επιλέξουμε $\xi = 1/3$.

Ορίζουμε τώρα, όταν το $x \in E$, μία συνάρτηση $f(x)$ ως εξής:

$$f(x) = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \cdots$$

όταν το x δίνεται από την (3.2). Είναι εύκολο να δούμε ότι στα άκρα ενός «μαύρου» διαστήματος (π.χ. στα $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 1$ και $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 0$) η $f(x)$ παίρνει την ίδια τιμή. Τότε ορίζουμε την $f(x)$ σε αυτό το διάστημα σταθερή και ίση με αυτή την τιμή. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ($f(0) = 0, f(2\pi) = 1$), είναι συνεχής, άυξουσα και προφανώς ιδιάζουσα. Θα την αποκαλούμε συνάρτηση Lebesque του συνόλου E.

Οι συντελεστές Fourier-Stieltjes της df δίνονται από τη σχέση:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}df(x), \tag{3.3}$$

και έτσι, ο μετασχηματισμός Fourier-Stieltjes της df ορίζεται από τη σχέση:

$$\gamma(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} df(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{iux} df(x),$$

για τη συνεχή παράμετρο u, με την f ορισμένη ίση με το μηδέν στο $(-\infty, 0)$ και ίση με 1 στο $(2\pi, \infty)$.

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes στην (3.3) παρατηρώντας ότι σε κάθε «λευκό» διάστημα του k-οστού βήματος της διαδικασίας, η φ αυξάνει κατά $1/2^k$. Τα διαστήματα δίνονται από την (3.1) ή για λόγους συντομίας από την:

$$x = 2\pi[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \cdots + \varepsilon_k r_k]$$

με $r_k = \xi^{k-1}(1-\xi)$. Ως εκ τούτου μία κατά προσέγγιση έκφραση του ολοκληρώματοσ:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} df(x)$$

είναι η

$$\frac{1}{2^k}\sum e^{2\pi i n[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \cdots + \varepsilon_k r_k]},$$

με το άθροισμα να εκτείνεται στους 2^k συνδυασμούς των $\varepsilon_j = 0, 1$. Το άθροισμα ισούται με

$$\frac{1}{2^k}\prod_{s=1}^{k}(1 + e^{2\pi i n r_s}) = e^{\pi i n \sum_{s=1}^{k} r_s}\prod_{s=1}^{k}\cos(\pi n r_s).$$

Αφού $\sum_{s=1}^{\infty} r_s = 1$, έχουμε:

$$e^{-\pi i n} 2\pi c_n = \prod_{k=1}^{\infty}\cos(\pi n r_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos(\pi n \xi^{k-1}(1-\xi)) \tag{3.4}$$

και ομοίως,

$$e^{-\pi i u} 2\pi\gamma(u) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos(\pi u \xi^{k-1}(1-\xi)). \tag{3.5}$$

3.1 Το πρόβλημα της συμπεριφοράς στο άπειρο

Είναι γνωστό από τη στοιχειώδη θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών ότι αν η f είναι απόλυτα συνεχής τότε ο μετασχηματισμός Fourier-Stieltjes

$$\gamma(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iux} df(x)$$

τείνει στο 0, καθώς $|u| \to \infty$, επειδή σε αυτήν την περίπτωση το $\gamma(u)$ δεν τίποτε άλλο παρά ο συνηθισμένος μετσχηματισμός Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Η κατάσταση είναι αρκετά διαφορετική αν η f είναι συνεχής, αλλά ιδι·αζοψσα. Σε αυτή την περίπτωση η $\gamma(u)$ δεν τείνει αναγκαστικά στο 0, αν και υπάρχουν ιδιάζουσες συναρτήσεις για τις οποίες $\gamma(u) \to 0$. Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για τους συντελεστές Fourier-Stieltjes c_n.

Το πρόβλημα το οποίο θα λύσουμε είναι το ακόλουθο. Έχοντας ένα τέλειο συμμετρικό σύνολο με σταθερή αναλογία τομής ξ, το οποίο συμβολίζουμε με $E(\xi)$, κατασκευάζουμε τη συνάρτηση Lebesque του συνόλου και προσπαθούμε να καθορίσουμε για ποιες τιμές του ξ ο μετασχηματισμός Fourier-Stieltjes (3.5) (ή οι συντελεστές Fourier-Stieltjes (3.4)) τείνει ή όχι στο μηδέν όταν το $|u|$ (ή το $|n|$) τείνει στο άπειρο (∞).

Θα αποδείξουμε πρώτα ένα γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. *Για κάθε συνάρτηση f φραγμένης κύμανσης, τα ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes*

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} e^{inx} df(x) \quad \textit{και} \quad 2\pi\gamma(u) = \int_0^{2\pi} e^{iux} df(x)$$

τείνουν ή όχι στο 0 μαζί όταν το $|n|$ και το $|u|$ τείνουν στο άπειρο.

Από τη στιγμή που είναι προφανές ότι η $\gamma(u) = o(1)$ συνεπάγεται την $c_n = o(1)$ έχουμε μόνο να αποδείξουμε την αντίστροφη πρόταση. Θα βασίσουμε την απόδειξη στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2. *Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, τέτοια ώστε*

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} df(x) \to 0 \tag{3.6}$$

όταν $|n| \to \infty$. Έστω $B(x)$ μια συνάρτηση για την οποία το ολοκλήρωμα Lebesque-Stieltjes

$$\int_0^{2\pi} B(x) df(x)$$

έχει νόημα. Τότε, το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} B(x) df(x)$$

τείνει επίσης στο μηδέν, καθώς $|n| \to \infty$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesque-Stieltjes υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση $T(x)$:

$$\int_0^{2\pi} |B(x) - T(x)| df(x) < \varepsilon, \tag{3.7}$$

με το ε αυθαίρετα μικρό.

Έπειτα, από γνωστό θεώρημα του Wiener η υπόθεση (3.6) συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής. Ως εκ τούτου, στην (3.7) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $T(x)$ με ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P(x)$. Αλλά η (3.6) συνεπάγεται ότι:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} P(x) df(x) \to 0.$$

Επομένως, αφού το ε είναι αυθαίρετα μικρό στην (3.7), έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} B(x) df(x) \to 0,$$

και το Λήμμα αποδείχθηκε. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. Υποθέτουμε ότι

$$c_n \to 0 \quad \text{καθώς} \quad |n| \to \infty.$$

Αν η $\gamma(u)$ δεν τείνει στο μηδέν καθώς το $|u| \to \infty$, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ με $|u_k| \to \infty$, τέτοια ώστε

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{iu_k x} df(x) \right| \geqslant \delta > 0.$$

Έστω

$$u_k = n_k + a_k,$$

με τους n_k ακέραιους και $0 \leqslant a_k < 1$. Βρίσκοντας, αν είναι αναγκαίο, μια υπακολουθία της $\{u_k\}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η a_k τείνει σε κάποιον αριθμό a. Τότε θα έχουμε:

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{in_k x} e^{iax} df(x) \right| \geqslant \frac{\delta}{2} > 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το Λήμμα αφού $c_n \to 0$ και η e^{iax} είναι συνεχής. □

Επομένως, για να μελετηθεί η συμπεριφορά της c_n ή της $\gamma(u)$ είναι αρκετό να μελετηθεί η

$$\Gamma(u) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(\pi u \xi^k) \tag{3.8}$$

όταν το $u \to \infty$.

Θεώρημα 3.3. *Το άπειρο γινόμενο $\Gamma(u)$ τείνει στο μηδέν όταν το $u \to \infty$ αν και μόνο αν ο $1/\xi$ δεν είναι αριθμός Pisot. Υποθέτουμε εδώ ότι $\xi \neq 1/2$.*

Παρατήρηση: Έχουμε δει ότι οι εκφράσεις (3.4) και (3.5) αναπαριστούν αντίστοιχα τους συντελεστές Fourier-Stieltjes και το μετασχηματισμό Fourier-Stieltjes της συνάρτησης Lebesque του συνόλου $E(\xi)$ αν $0 < \xi < 1/2$. Παρόλα αυτά, είναι εύκολο να δούμε ότι για να έχουν νόημα τα άπειρα γινόμενα (3.4), (3.5) και (3.8), είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι $0 < \xi < 1$. Για παράδειγμα, η $\Gamma(u)$ αναπαριστά επίσης ένα μετασχηματισμό Fourier-Stieltjes αν $0 < \xi < 1$.

Το θεώρημα ισχύει στη γενική περίπτωση όπου $0 < \xi < 1$, αλλά κάνουμε αυτήν την επιπλέον υπόθεση για να το αποδείξουμε.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3. Αν $\Gamma(u) \neq o(1)$ για $u \to \infty$, μπορούμε να βρούμε μια άπειρη αύξουσα ακολουθία u_s:

$$|\Gamma(u_s)| \geqslant \delta > 0.$$

Γράφοντας $1/\xi = \theta$ ($\theta > 1$), μπορούμε να γράψουμε ότι

$$u_s = \lambda_s \theta^{m_s},$$

όπου οι m_s είναι φυσικοί αριθμοί που αυξάνουν στο ∞ και $1 \leqslant \lambda_s < \theta$.

Βρίσκοντας, αν χρειάζεται, υπακολουθία της $\{u_s\}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_s \to \lambda$ ($1 \leqslant \lambda \leqslant \theta$). Γράφουμε:

$$|\Gamma(u_s)| \leqslant \cos(\pi\lambda_s)\cos(\pi\lambda_s\theta)\cdots\cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s}),$$

από όπου έπεται ότι

$$\prod_{q=0}^{m_s}[1 - \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q)] \geqslant \delta^2,$$

και αφού $1 + x < e^x$,

$$e^{-\sum_{q=0}^{m_s}\sin^2(\pi\lambda_s\theta^q)} \geqslant \delta^2,$$

το οποίο σημαίνει ότι,

$$\sum_{q=0}^{m_s}\sin^2(\pi\lambda_s\theta^q) \leqslant \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Διαλέγοντας οποιοδήποτε $r > s$ έχουμε:

$$\sum_{q=0}^{m_s}\sin^2(\pi\lambda_r\theta^q) \leqslant \sum_{q=0}^{m_r}\sin^2(\pi\lambda_r\theta^q) \leqslant \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Σταθεροποιώντας το s και αφήνοντας το $r \to \infty$ έχουμε:

$$\sum_{q=0}^{m_s}\sin^2(\pi\lambda\theta^q) \leqslant \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

και αφού το s είναι αυθαίρετα μεγάλο,

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2(\pi\lambda\theta^q) \leqslant \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

το οποίο σύμφωνα με το Κεφάλαιο 1, δείχνει ότι ο $\theta = \xi^{-1}$ είναι αριθμός Pisot. Έτσι έχουμε ότι η $\Gamma(u) \neq o(1)$ συνεπάγεται ότι ο θ είναι αριθμός Pisot.

Αντίστροφα, αν ο θ είναι αριθμός Pisot και $\theta \neq 2$, τότε το $\Gamma(u)$ δεν πηγαίνει στο 0. (*Σημείωση:* αν $\xi = 1/2$ τότε οι συντλεστές Fourier-Stieltjes c_n της (3.4) είναι μηδέν για όλα τα $n \neq 0$ και τότε $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.)

Υποθέτοντας τώρα ότι $\theta = \xi^{-1} \neq 2$ έχουμε:

$$\Gamma(\theta^k) = |\cos(\pi\theta)\cos(\pi\theta^2)\cdots\cos(\pi\theta^k)\cdots| \cdot \left|\cos\frac{\pi}{\theta}\cdot\cos\frac{\pi}{\theta^2}\cdots\cos\frac{\pi}{\theta^k}\right|.$$

Αφού ο θ είναι αριθμός Pisot έχουμε: $\sum \sin^2(\pi\theta^n) < \infty$. Ως εκ τούτου, το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{m=1}^{\infty} \cos^2(\pi\theta^m)$$

συγκλίνει σε έναν αριθμό $A \neq 0$ (εκτός αν $\theta^q = h + \frac{1}{2}$, με τον h φυσικό αριθμό, το οποίο απορρίπτεται, αφού ο θ είναι αριθμός Pisot. Ως εκ τούτου,

$$|\Gamma(\theta^k)| \geqslant \sqrt{A}\left|\cos\frac{\pi}{\theta}\cdot\cos\frac{\pi}{\theta^2}\cdots\right|,$$

και το τελευταίο γινόμενο συγκλίνει σε έναν αριθμό $B > 0$, αφού $\theta \neq 2$ (είναι αδύνατο να έχουμε $\theta^q = 2$ για $q > 1$ αν ο θ είναι αριθμός Pisot). Ως εκ τούτου,

$$|\Gamma(\theta^k)| \geqslant B\sqrt{A},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

4 Σύνολα μοναδικότητας

Έστω η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.1}$$

όπου η μεταβλητή x είναι πραγματικός αριθμός. Η κλασσική θεωρία του Cantor δείχνει ότι αν η σειρά τείνει παντού στο 0, τότε μηδενίζεται ταυτοτικά, δηλαδή

$$a_n = 0 \text{ και } b_n = 0, \qquad \text{για κάθε } n.$$

Ο Cantor γενίκευσε το παραπάνω αποτέλεσμα αποδεικνύοντας ότι αν η (4.1) τείνει στο 0 για όλα τα x εκτός ενός συνόλου E που περιέχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία x, τότε το αποτέλεσμα ισχύει και πάλι δηλαδή

$$a_n = 0 \text{ και } b_n = 0, \qquad \text{για κάθε } n.$$

Ο Cantor έδειξε ακόμα ότι το συμπέρασμα ισχύει ακόμα και αν το σύνολο E' των σημείων συσσώρευσης του E είναι πεπερασμένο, ή ακόμα και με την προϋπόθεση ότι οποιοδήποτε από τα παράγωγα σύνολα του E (το οποίο είναι πεπερασμένης ή υπερπεπερασμένης τάξης) είναι κενό, με άλλα λόγια αν το E είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο το οποίο είναι αναγώγιμο.

Τα αποτελέσματα του Cantor αποδείχθηκαν το 1870. Το 1908, ο W. H. Young απέδειξε ότι το αποτέλεσμα του Cantor ισχύει ακόμα και αν το E είναι αριθμήσιμο (όχι αναγκαία αναγώγιμο).

Τα προηγούμενα αποτελέσματα οδηγούν στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.1. Έστω E ένα σύνολο σημείων του $(0, 2\pi)$. Το E λέγεται σύνολο μοναδικότητας (θα το λέμε U σύνολο) αν δεν υπάρχει τριγωνομετρική σειρά (εκτός της ταυτοτικά μηδενικής) που να συγκλίνει στο μηδέν παντού, εκτός ίσως, από κάποια $x \in E$. Διαφορετικά θα λέγεται σύνολο πολλαπλότητας (M σύνολο).

Είδαμε ότι οποιοδήποτε αριθμήσιμο σύνολο είναι U σύνολο. Επίσης, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, αν το E είναι σύνολο θετικού μέτρου, τότε το E είναι M σύνολο.

Συνεπώς, είναι φυσιολογικό να προσπαθήσουμε να χαρακτηρίσουμε τα σύνολα μέτρου 0 χωρίζοντάς τα στις κλάσεις M και U. Θα δώσουμε μια μερική λύση στο πρόβλημα αυτό στα επόμενα δυο κεφάλαια. Θα ξεκινήσουμε αναφέροντας μερικά βασικά θεωρήματα της θεωρίας του Riemann για τις τριγωνομετρικές σειρές.

Ορισμός 4.2. (α) Για κάθε συνάρτηση $G(x)$, της πραγματικής μεταβλητής x, γράφουμε

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 G(x) = \frac{G(x+h) + G(x-h) - 2G(x)}{h^2},$$

και αν αυτή συγκλίνει για κάποιο σταθερό x σε ένα όριο λ, όταν το $h \to 0$, θα λέμε ότι η $G(x)$ έχει, στο σημείο x, δεύτερη γενικευμένη παράγωγο ίση με λ.

(β) Αν σε κάποιο σημείο x, η

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 G(x) = \frac{G(x+h) + G(x-h) - 2G(x)}{h^2}$$

τείνει στο 0 όταν $h \to 0$, θα λέμε ότι η $G(x)$ είναι *ομαλή* στο σημείο x.

Θεώρημα 4.3 (Cantor-Lebesgue). *Αν η τριγωνομετρική σειρά*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.2}$$

συγκλίνει σε ένα σύνολο θετικού μέτρου, τότε οι συντελεστές a_n, b_n τείνουν στο μηδέν.

Ορισμός 4.4. Αν ολοκληρώσουμε τη σειρά (4.2) δύο φορές, υποθέτοντας ότι $a_n \to 0, b_n \to 0$, παίρνουμε τη συνεχή συνάρτηση

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}{n^2}, \tag{4.3}$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα. Αν, σε κάποιο x, η $F(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο ίση με s, λέμε ότι η (4.2) είναι Riemann αθροίσιμη ή R-αθροίσιμη και το άθροισμα της είναι ίσο με s.

Θεώρημα 4.5. *Αν η σειρά* (4.2) *(με $a_n, b_n \to 0$) συγκλίνει στο s για ένα σημείο x, τότε είναι επίσης R-αθροίσιμη στο s στο σημείο x.*

Θεώρημα 4.6. *Αν η σειρά* (4.2)*, με συντελεστές που τείνουν στο 0, είναι R-αθροίσιμη στο 0 για όλα τα σημεία ενός διαστήματος, τότε η σειρά συγκλίνει στο 0 στο διάστημα αυτό* (*συνέπεια της αρχής της τοπικότητας*).

Θεώρημα 4.7. *Η συνάρτηση $F(x)$, υποθέτοντας πάντα ότι $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, είναι ομαλή σε κάθε σημείο x.*

Θεώρημα 4.8. *Έστω $G(x)$ συνεχής σε ένα διάστημα (a, b). Αν η δεύτερη παράγωγος υπάρχει και είναι ίση με 0 στο (a, b), τότε η $G(x)$ είναι γραμμική στο (a, b).*

Θεώρημα 4.9. *Το Θεώρημα 4.8 ισχύει ακόμα και αν η δεύτερη παράγωγος υπάρχει και είναι 0 εκτός από τα σημεία ενός αριθμήσιμου συνόλου E, υπό την προϋπόθεση ότι στα σημεία αυτά η G είναι ομαλή.*

Ιστορικά, αυτό το θεώρημα αποδείχτηκε πρώτα από τον Cantor όταν (α) το E είναι πεπερασμένο, (β) το E είναι αναγώγιμο, δηλαδή έχει παράγωγο σύνολο πεπερασμένης ή αριθμήσιμης τάξης το οποίο είναι κενό. Επεκτάθηκε πολύ αργότερα από τον Young στη γενική περίπτωση που το E είναι αριθμήσιμο.

Τελικά από το Θεώρημα 4.9 οδηγούμαστε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.10. *Αν η σειρά* (4.2) *συγκλίνει στο 0 για όλα τα σημεία του $(0, 2\pi)$ εκτός, ίσως, από τα σημεία x ενός αριθμήσιμου συνόλου E, τότε η σειρά είναι ταυτοτικά μηδέν. Με άλλα λόγια κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι U σύνολο.*

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 4.5, 4.7, και 4.9. Εφαρμόζοντας αυτά τα θεωρήματα βλέπουμε ότι η $F(x)$ είναι γραμμική, έστω $F(x) = Ax + B$. Συνεπώς, για όλα τα x,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}{n^2} = \frac{1}{4}a_0x^2 - Ax - B.$$

Η περιοδικότητα της σειράς δίνει ότι $a_0 = A = 0$. Επίσης, αφού η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, συμπεραίνουμε ότι $B = 0$ και $a_n = b_n = 0$ για κάθε n. Συνεπώς $A = B = 0$, άρα $F(x) = 0$. □

Αποδεικνύουμε τώρα το εξής.

Θεώρημα 4.11. *Κάθε σύνολο θετικού μέτρου είναι M σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $E \subset (0, 2\pi)$ και $|E| > 0$. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι υπάρχει τριγωνομετρική σειρά (που δεν είναι ταυτοτικά 0) η οποία συγκλίνει στο 0 για κάθε x στο συμπλήρωμα του E, το οποίο συμβολίζουμε με E^c.

Έστω P ένα τέλειο σύνολο (δηλαδή το P είναι κλειστό και $P = P'$, όπου P' το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του P), με $P \subset E$ και $|P| > 0$. Παίρνουμε την χαρακτηριστική του συνάρτηση $\chi_P(x)$. Σε ένα διάστημα Δ στο συμπλήρωμα του P, έχουμε ότι $\chi_P(x) = 0$. Συνεπώς η σειρά Fourier της $\chi_P(x)$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \sim \chi_P(x)$$

συγκλίνει στο 0 στο Δ. Συνεπώς συγκλίνει στο 0 στο P^c, και επίσης $E^c \subset P^c$, άρα συγκλίνει στο μηδέν και στο E^c. Αλλά αυτή η σειρά δεν είναι ταυτοτικά 0 γιατί

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_P(x)dx = \frac{|P \cap [0, 2\pi]|}{\pi} = \frac{|P|}{\pi} > 0,$$

αφού $|P| > 0$. Το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.8. Αν $G''(x) = 0$ και x_0 στο (a, b), τότε έχουμε ότι

$$\int_{x_0}^{x} G''(t)dt = \int_{x_0}^{x} \mathbf{0}\, dt$$

άρα,

$$G'(x) - G'(x_0) = c$$

από το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού, άρα $G'(x) = G'(x_0) + c$ και ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά έχουμε

$$\int_{x_0}^{x} G'(t)dt = \int_{x_0}^{x} [G'(x_0) + c]\, dt.$$

Από το ίδιο θεώρημα, $G(x) - G(x_0) = [G'(x_0) + c](x - x_0)$, δηλαδή

$$G(x) = [G'(x_0 =) + c](x - x_0) + G(x_0).$$

Άρα, αν $A = G'(x_0) + c$ και $B = G(x_0) - [G'(x_0) + c]x_0$, τότε $G(x) = Ax + B$ και άρα η G είναι γραμμική. □

4.1 Σύνολα πολλαπλότητας

Το πρόβλημα της ταξινόμησης των συνόλων μέτρου μηδέν σε σύνολα U και M παραμένει ανοικτό. Αλλά έχει απαντηθεί πλήρως για συγκεκριμένες οικογένειες τέλειων συνόλων, όπως θα δείξουμε στα επόμενα δύο κεφάλαια.

Θα χρειαστούμε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.12. *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα κλειστό σύνολο σύνολο πολλαπλότητας (δηλαδή σύνολο τύπου M), είναι να υπάρχει τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(όχι ταυτοτικά μηδέν), με συντελεστές $c_n = o(1/n)$ που να αναπαριστά σταθερή συνάρτηση σε κάθε διάστημα ξένο προς το E.

Απόδειξη. Η συνθήκη είναι αναγκαία. Έστω E ένα κλειστό σύνολο τύπου M. Θεωρούμε μια μη μηδενική τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}, \tag{4.4}$$

που να συγκλίνει στο μηδέν σε κάθε διάστημα ξένο προς το E.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}, \tag{4.5}$$

αλλά με το $\gamma_0 = 0$, που να έχει την ίδια ιδιότητα. Η (4.4) έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό συντελεστή, ας πούμε, τον γ_k. Έστω $l \neq k$. Η σειρά

$$\gamma_k e^{-ilx} \sum \gamma_n e^{inx} - \gamma_l e^{-ikx} \sum \gamma_n e^{inx}$$

έχει μηδενικό σταθερό όρο, και συγκλίνει στο μηδέν, όπως η (4.4), για κάθε x που ανήκει στο E^c, το συμπληρωματικό σύνολο του E. Έστω E_1 το σύνολο όπου η (4.4) δεν συγκλίνει στο μηδέν. Η (4.5) δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν, αφού τα μόνα σημεία του E_1 (που πρέπει να είναι υποχρεωτικά άπειρα το πλήθος) για τα οποία η (4.5) συγκλίνει στο μηδέν είναι τα σημεία (πεπερασμένα το πλήθος), όπου

$$\gamma_k e^{-ilx} - \gamma_l e^{-ikx} = 0.$$

Θεωρούμε τώρα τη σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx} \qquad (\gamma_0 = 0),$$

η οποία συγκλίνει στο μηδέν στο συμπλήρωμα του E. Ολοκληρώνοντας τη σειρά δύο φορές, έχουμε την

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\gamma_n}{-n^2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{-n^2} e^{inx},$$

και άρα από τα Θεωρήματα του Riemann (Θεωρήματα 4.5 και 4.8), η σειρά αναπαριστά μια γραμμική συνάρτηση σε κάθε διάστημα του E^c. Αλλά αυτή η σειρά είναι το ολοκλήρωμα της σειράς Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\gamma_n}{in} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{in} e^{inx},$$

η οποία θα πρέπει συνεπώς να αναπαριστά σταθερή συνάρτηση σε κάθε διάστημα του E^c, και αυτό είναι αρκετό για να πούμε ότι τα

$$c_n = \frac{\gamma_n}{in} = o(1/n),$$

αφού υποχρεωτικά $\gamma_n \to 0$ (Θεώρημα 4.3).

Η συνθήκη είναι ικανή. Υποθέτουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(όχι ταυτοτικά μηδέν), με συντελεστές $c_n = o(1/n)$ αναπαριστά σταθερή συνάρτηση σε κάθε διάστημα του E^c. Μπορούμε να γράψουμε

$$c_n = \frac{\gamma_n}{in} \quad \text{με} \;\; \gamma_n \to 0.$$

Έπεται ότι το ολοκλήρωμα της σειράς

$$c_0 x - \sum_{|n|\geqslant 1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} e^{inx}$$

αναπαριστά μια γραμμική συνάρτηση σε κάθε διάστημα του E^c. Συνεπώς, η σειρά

$$\sum \gamma_n e^{inx}$$

είναι R-αθροίσιμη στο μηδέν σε κάθε διάστημα του E^c και άρα, από το Θεώρημα 4.6, συγκλίνει στο μηδέν σε κάθε διάστημα ξένο προς το E, και άρα το E είναι σύνολο πολλαπλότητας. □

Σχόλιο. Αν η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

του θεωρήματος αναπαριστά μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, η σειρά

$$\sum \gamma_n e^{inx}$$

που συγκλίνει στο μηδέν στο E^c είναι μια σειρά Fourier-Stieltjes (με τη συνήθη ορολογία, η σειρά Fourier-Stieltjes ενός «μέτρου», του οποίου ο «φορέας» είναι το E). Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι το E είναι ένα σύνολο πολλαπλότητας με την περιορισμένη έννοια.

Για την κατασκευή ενός συνόλου πολλαπλότητας με την περιορισμένη έννοια, είναι αρκετό να κατασκευάσουμε ένα τέλειο σύνολο, φορέα ενός μέτρου

$$d\mu \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx},$$

με συντελεστές Fourier-Stieltjes

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu(x),$$

που τείνουν στο 0 όταν $|n| > \infty$. Συνέπεια των αποτελεσμάτων της Παραγράφου 2 είναι ότι κάθε συμμετρικό τέλειο σύνολο $E(\xi)$ με σταθερή αναλογία τομής ξ, τέτοιο ώστε ο $1/\xi$ να μην είναι αριθμός Pisot, είναι ένα σύνολο πολλαπλότητας M. Πράγματι, με βάση το προηγούμενο σχόλιο, είναι αρκετό να πάρουμε ως μ το μέτρο που προκύπτει από τη συνάρτηση Lebesgue του συνόλου $E(\xi)$.

4.2 Κατασκευή συνόλων μοναδικότητας

Έχουμε μόλις δει ότι για να αποδείξουμε αν ένα κλειστό σύνολο E είναι σύνολο μοναδικότητας, πρέπει να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(όχι ταυτοτικά μηδέν), με συντελεστές $c_n = o(1/n)$ που να αναπαριστά σταθερή συνάρτηση σε κάθε διάστημα του E^c.

Αποδείξαμε μόνο ότι ένα συμμετρικό τέλειο σύνολο $E(\xi)$ είναι σύνολο τύπου M αν ο ξ^{-1} δεν είναι αριθμός Pisot, αλλά δεν μπορούμε, σε αυτό το στάδιο να δείξουμε ότι αν ο ξ^{-1} είναι αριθμός Pisot τότε το $E(\xi)$ είναι σύνολο τύπου U. Αυτό γιατί εμείς ξέρουμε μόνο ότι αν ο ξ^{-1} είναι αριθμός Pisot τότε οι συντελεστές Fourier-Stieltjes του μέτρου Lebesque που κατασκευάζεται στο σύνολο δεν τείνουν στο μηδέν. Αλλά εμείς δεν ξέρουμε (α) αν αυτό είναι αληθές για κάθε μέτρο του οποίου ο φορέας είναι το $E(\xi)$ ή (β) αν δεν υπάρχει σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

με $c_n = o(1/n)$ που να αναπαριστά σταθερή συνάρτηση σε κάθε διάστημα του E^c και η οποία δεν είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης (η σειρά $\sum \gamma_n e^{inx}$ δεν είναι σειρά Fourier-Stieltjes).

Μια τέτοια απόδειξη θα ήταν αρκετά δύσκολο να γίνει. Γενικά για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο E είναι σύνολο τύπου U προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι ανήκει σε μια οικογένεια συνόλων, για τα οποία γνωρίζουμε από ορισμένες ιδιότητές τους, ότι είναι σύνολα τύπου U. Στο πλαίσιο αυτό θα κάνουμε χρήση του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.13. *Έστω E ένα κλειστό σύνολο τέτοιο ώστε να υπάρχει μια άπειρη ακολουθία συναρτήσεων $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ με τις ακόλουθες ιδιότητεσ:*

1. $\lambda_k(x) = 0$ *για όλα τα k, όταν $x \in E$.*
2. *Η σειρά Fourier κάθε*
$$\lambda_k(x) = \sum_n \gamma_n^{(k)} e^{inx}$$
συγκλίνει απολύτως, και έχουμε:
$$\sum_n |\gamma_n^{(k)}| < A,$$
όπου A σταθερά ανεξάρτητη του k.
3. *Έχουμε:* $\lim_{k\to\infty} \gamma_n^{(k)} = 0$ *για $n \neq 0$, και*
$$\lim_{k\to\infty} \gamma_0^{(k)} = l \neq 0.$$
4. *Η παράγωγος $\lambda_k'(x)$ υπάρχει για κάθε x και για κάθε k και είναι φραγμένη, όπου το φράγμα μπορεί να εξαρτάται από το k.*

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, το E είναι σύνολο μοναδικότητας.

Θα αποδείξουμε αρχικά το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.14. *Έστω E ένα κλειστό σύνολο, $\lambda(x)$ μια συνάρτηση που μηδενίζεται για $x \in E$ και η οποία έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier $\sum \gamma_n e^{inx}$ και φραγμένη παράγωγο $\lambda'(x)$. Έστω $\sum c_n e^{inx}$ μια τριγωνομετρική σειρά, η οποία συγκλίνει στο μηδέν σε κάθε διάστημα του συμπληρωματικού συνόλου E^c. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις έχουμε:*
$$\sum \overline{\gamma_n}\, c_n = 0.$$
(Αυτή η σειρά προφανώς συγκλίνει, αφού $\sum |\gamma_n| < \infty$ και $c_n \to 0$).

Απόδειξη. Έστω Δ ένα διάστημα ξένο προς το E. Η σειρά

$$c_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{|n| \geqslant 1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{inx}$$

συγκλίνει σε μια γραμμική συνάρτηση στο Δ. Ως εκ τούτου, η σειρά Fourier

$$f \sim \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

αναπαριστά στο Δ μια συνάρτηση $-y_0 q + a$, όπου η σταθερά $a = a(\Delta)$ εξαρτάται από το Δ. Ο τύπος του Parseval ισχύει από την υπόθεσή μας για τις συναρτήσεις $f(x)$ και

$$\lambda'(x) \sim \sum \gamma_n (in) e^{inx},$$

και δίνει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\lambda'(x)} f(x) dx = - \sum_{|n| \geqslant 1} \overline{\gamma_n}\, c_n.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \overline{\lambda'(x)} (-c_0 x + a)\, dx,$$

αφού οι $\lambda(x)$ και $\lambda'(x)$ είναι μηδέν για $x \in E$. (Σημειώνουμε ότι αν το E είναι κλειστό αλλά όχι τέλειο, τα μεμονωμένα σημεία του είναι αριθμήσιμα το πλήθος). Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, βλέπουμε ότι

$$\int_{\Delta} \overline{\lambda'(x)} (-c_0 x + a)\, dx = [(-c_0 x + a) \overline{\lambda(x)}]_{\Delta} + c_0 \int_{\Delta} \overline{\lambda(x)}\, dx,$$

και συγκρίνοντας τις τελευταίες τρεις σχέσεις, έχουμε

$$- \sum_{|n| \geqslant 1} \overline{\gamma_n} c_n = c_0 \frac{1}{2\pi} \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \overline{\lambda(x)}\, dx = c_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\lambda(x)}\, dx = c_0 \overline{\gamma_0},$$

ή τελικά, $\sum \overline{\gamma_n} c_n = 0$. □

Σημείωση. Η υπόθεση ότι η $\lambda'(x)$ είναι φραγμένη θα μπορούσε να είναι ασθενέστερη (το οποίο θα οδηγούσε σε μία ασθενέστερη υπόθεση (4) του θεωρήματος) αλλά αυτό δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον στις εφαρμογές μας. Θα πρέπει να τονίσουμε όμως ότι κάποια υπόθεση για την $\lambda(x)$ είναι απαραίτητη. Πράγματι, ξέρουμε ότι από πρόσφατα αποτελέσματα στη φασματική σύνθεση το λήμμα δεν θα ίσχυε αν υποθέταμε μόνο ότι $\lambda(x) = 0$ για $x \in E$ και ότι η σειρά Fourier συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.13. Υποθέτουμε ότι το E δεν είναι σύνολο μοναδικότητας. Άρα θα υπάρχει μια σειρά
$$\sum c_n e^{inx}$$
(όχι ταυτοτικά 0) που συγκλίνει στο 0 σε κάθε διάστημα του E^c. Το Λήμμα τότε δίνει ότι:

$$\sum_n \overline{\gamma_n^{(k)}} c_n = 0 \tag{4.6}$$

για όλα τα k.

Αφού $c_n \to 0$ όταν $n \to \infty$ (από το γενικό Θεώρημα 3.1) η υπόθεση (2) δίνει:
$$\left| \sum_{|n|\geqslant N} \overline{\gamma_n^{(k)}} c_n \right| \leqslant A \cdot \max\{|c_n| : |n| \geqslant N\} \leqslant A\varepsilon,$$
όπου το ε είναι αυθαίρετα μικρό για αρκετά μεγάλο N. Έχοντας σταθεροποιήσει το N, έχουμε
$$\left| \sum_{1\leqslant|n|<N} \overline{\gamma_n^{(k)}} c_n \right| \leqslant \varepsilon$$
για αρκετά μεγάλα k από την υπόθεση (3) του Θεωρήματος. Ως εκ τούτου, ο πρώτος όρος της (4.6) διαφέρει από το $c_0 l$ κατά μία ποσότητα αυθαίρετα μικρή για αρκετά μεγάλα k. Αυτό αποδεικνύει ότι $c_0 = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τη σειρά
$$\sum c_n e^{inx}$$
με e^{-ikx}, βρίσκουμε ότι ο σταθερός της όρος είναι c_k. Έτσι, το ίδιο επιχείρημα δίνει ότι $c_k = 0$ για όλα τα k, ότι η σειρά $\sum c_n e^{inx}$ είναι ταυτοτικά μηδέν και ότι το E είναι σύνολο τύπου U. □

Πρώτη εφαρμογή: σύνολα τύπου H. Θα λέμε ότι ένα σύνολο $E \subset (0, 2\pi)$ είναι «τύπου H» αν υπάρχουν ένα διάστημα (a, b) το οποίο περιέχεται στο $(0, 2\pi)$ και μια άπειρη ακολουθία ακεραίων $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε για οποιοδήποτε $x \in E$ κανένα από τα σημεία $n_k x$ (διαιρεμένα modulo 2π) δεν ανήκει στο (a, b).

Για παράδειγμα, τα σημεία του τριαδικού συνόλου του Cantor (το οποίο θεωρούμε κατασκευασμένο στο $(0, 2\pi)$):
$$x = 2\pi \left[\frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_2}{3^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k}{3^k} + \cdots \right]$$
όπου κάθε ε_j είναι 0 ή 2, σχηματίζουν ένα σύνολο τύπου H, αφού τα σημεία
$$3^k x \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$
δεν ανήκουν ποτέ στο μεσαίο τρίτο του $(0, 2\pi)$. Το ίδιο ισχύει για κάθε συμμετρικό τέλειο σύνολο $E(\xi)$ με σταθερή αναλογία τομής ξ, αν ο $1/\xi$ είναι ακέραιος αριθμός.

Θεώρημα 4.15. *Κάθε κλειστό σύνολο τύπου H (άρα και κάθε σύνολο τύπου H) είναι ένα σύνολο τύπου U.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$, αυθαίρετα μικρό, και ορίζουμε μια συνάρτηση $\lambda(x)$ μηδενική στο $(0, a)$ και στο $(b, 2\pi)$, ίση με 1 στο $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ και με φραγμένη παράγωγο $\lambda'(x)$, τέτοια ώστε η σειρά Fourier της να συγκλίνει απόλυτα.

Γράφουμε
$$\lambda(x) = \sum_m \gamma_m e^{imx}$$
και
$$\lambda_k(x) = \lambda(n_k x) = \sum_m \gamma_m e^{imn_k x}.$$
Η ακολουθία των συναρτήσεων $\{\lambda_k(x)\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος (4.13). Συγκεκριμένα, το $\lambda(n_k x)$ είναι μηδέν για όλα τα $x \in E$ και για όλα τα k, και αφού
$$\gamma_n^{(k)} = \gamma_m$$
αν και μόνο αν $n = mn_k$, και $\gamma_n^{(k)} = 0$ αν ο n_k δεν διαιρεί τον n, βλέπουμε ότι η υπόθεση (3) ικανοποιείται με
$$l = \gamma_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(x)dx = \frac{1}{2\pi}(b-a-2\varepsilon),$$
το οποίο είναι θετικό αν το ε έχει επιλεγεί αρκετά μικρό. □

Δεύτερη εφαρμογή: σύνολα τύπου $H^{(n)}$. Τα σύνολα τύπου H έχουν γενικευθεί από τον Piatecki-Shapiro, ο οποίος περιέγραψε τα παρακάτω σύνολα, τα οποία αποκάλεσε τύπου $H^{(n)}$.

Ορισμός 4.16. Θεωρούμε στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ μια άπειρη οικογένεια διανυσμάτων $\{V_k\}$ με ακέραιες συντεταγμένες
$$V_k = \{p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, \dots, p_k^{(n)}\}, \qquad k = 1, 2, \dots$$
Αυτή η οικογένεια θα ονομάζεται *κανονική*, αν, δοθέντων n ακεραίων $a_1, a_2, \dots, a_n$, οι οποίοι δεν είναι όλοι μηδέν, έχουμε:
$$\left| a_1 p_k^{(1)} + a_2 p_k^{(2)} + \cdots + a_n p_k^{(n)} \right| \to \infty$$
όταν $k \to \infty$.

Έστω Δ μια περιοχή στο n-διάστατο torus
$$0 \leqslant x_j < 2\pi \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Θα λέμε ότι ένα σύνολο E ανήκει στα σύνολα τύπου $H^{(n)}$ αν υπάρχουν μια περιοχή Δ και μια κανονική οικογένεια διανυσμάτων V_k τέτοια ώστε, για όλα τα $x \in E$ και για όλα τα k, το σημείο με συντεταγμένες

$$p_k^{(1)}x, p_k^{(2)}x, \ldots, p_k^{(n)}x,$$

όλες διαιρεμένες modulo 2π, να μην ανήκει στο Δ.

Θεώρημα 4.17. *Κάθε σύνολο E τύπου $H^{(n)}$ είναι σύνολο μοναδικότητας.*

Απόδειξη. Μπορούμε και πάλι να υποθέσουμε ότι το E είναι κλειστό και να πάρουμε $n = 2$, τη δισδιάστατη περίπτωση, ως συνήθως. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια των διανυσμάτων

$$V_k = (p_k, q_k)$$

είναι κανονική. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Δ αποτελείται από τα σημεία (x_1, x_2) που ικανοποιούν τις

$$a_1 < x_1 < b_1 \quad \text{και} \quad a_2 < x_2 < b_2,$$

όπου τα διαστήματα (a_1, b_1) και (a_2, b_2) περιέχονται στο $(0, 2\pi)$.

Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $\lambda(x)$ και $\mu(x)$, οι οποίες κατασκευάζονται με βάση τα διαστήματα (a_1, b_1) και (a_2, b_2) αντίστοιχα, όπως ήταν, στην περίπτωση των συνόλων τύπου H, η συνάρτηση $\lambda(x)$ ορισμένη με βάση το (a, b). Κάτω από αυτές τις συνθήκες, οι συναρτήσεις

$$\lambda(p_k x)\mu(q_k x), \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

είναι ίσες με μηδέν για όλα τα k και για όλα τα $x \in E$. Αυτή η ακολουθία των συναρτήσεων θα παίξει το ρόλο των ακολουθιών που συμβολίζαμε με $\lambda_k(x)$ στο Θεώρημα 4.13. Έτσι η υπόθεση (1) του Θεωρήματος 4.13 ικανοποιείται.

Γράφουμε

$$\lambda(x) = \sum \gamma_m e^{imx}, \quad \mu(x) = \sum \delta_m e^{imx}.$$

Η σειρά Fourier της $\lambda(p_k x)\mu(q_k x)$ συγκλίνει απολύτως και γράφοντας

$$\lambda(p_k x)\mu(q_k x) = \sum c_n^{(k)} e^{inx},$$

έχουμε

$$\sum c_n^{(k)} e^{inx} = \sum \gamma_m \delta_{m'} e^{i(mp_k + m'q_k)x}$$

και

$$\sum |c_n^{(k)}| \leqslant \left(\sum |\gamma_n|\right)\left(\sum |\delta_n|\right) \leqslant A.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η συνθήκη (2) επίσης ικανοποιείται.

Η συνθήκη (4) ικανοποιείται αν έχουμε επιλέξει τις $\lambda(x)$ και $\mu(x)$ να έχουν φραγμένες παραγώγους.

Τέλος για τη συνθήκη (3) παρατηρούμε ότι

$$c_n^{(k)} = \sum_{n=mp_k+m'q_k} \gamma_m \delta_{m'}. \tag{4.7}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $n=0$. Τότε,

$$c_0^{(k)} = \sum_{mp_k+m'q_k\neq 0} \gamma_m \delta_{m'} = \gamma_0\delta_0 + \sum_{mp_k+m'q_k=0} *\gamma_m\delta_{m'} = \gamma_0\delta_0 + T,$$

όπου το αστεράκι $(*)$ σημαίνει ότι: $|m|+|m'|\neq 0$. Θα αποδείξουμε ότι το T τείνει στο μηδέν όταν $k\to\infty$. Γράφουμε $T=T_1+T_2$, όπου το T_1 αφορά τους δείκτες $|m|\leqslant N$, $|m'|\leqslant N$. Αφού η οικογένεια των διανυσμάτων $\{V_k\}$ είναι κανονική, αν $|m|+|m'|\neq 0$, τότε το $mp_k+m'q_k$ δεν μπορεί να είναι μηδέν αν το k είναι αρκετά μεγάλο και αν τα m και m' επιλεγούν ανάμεσα στους πεπερασμένους το πλήθος ακεραίους που ικανοποιούν τις $|m|\leqslant N$, $|m'|\leqslant N$. Από την άλλη μεριά, στο T_2, είτε $|m|>N$ είτε $|m'|>N$ και έτσι το

$$|T_2| \leqslant \left(\sum_{|m|>N}|\gamma_m|\right)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|\delta_{m'}|\right) + \left(\sum_{-\infty}^{\infty}|\gamma_m|\right)\left(\sum_{|m'|>N}|\delta_{m'}|\right)$$

είναι αυθαίρετα μικρό για N αρκετά μεγάλο. Διαλέγοντας αρχικά ένα N και έπειτα ένα k, βλέπουμε ότι

$$c_0^{(k)} \to \gamma_0\delta_0$$

καθώς $k\to\infty$, και αφού $\gamma_0\delta_0\neq 0$, το δευτέρο σκέλος της συνθήκης (3) έχει ικανοποιηθεί.

Αν τώρα $n\neq 0$, τότε το δεύτερο μέλος της (4.7) δεν περιέχει τον όρο όπου $m=0, m'=0$. Το ίδιο επιχείρημα οδηγεί τότε στο συμπέρασμα ότι

$$c_n^{(k)} \to 0 \text{ για } k\to\infty, n\neq 0.$$

Ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη ότι όλες οι συνθήκες του γενικού θεωρήματος ικανοποιούνται, και ως εκ τούτου ότι το σύνολο E είναι σύνολο μοναδικότητας. $\square$

5 Το θεώρημα Salem-Zygmund

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του Minkowski για τις γραμμικές μορφές.

Θεώρημα 5.1 (Minkowski). *Έστω οι n γραμμικές μορφές n μεταβλητών*

$$\lambda_p(x) = \sum_{q=1}^{n} a_q^p x_q, \qquad p=1,2,\dots,n$$

όπου υποθέτουμε πρώτα ότι οι συντελεστές a_q^p είναι πραγματικοι αριθμοί. Υποθέτουμε ότι η ορίζουσα $D = \det(A)$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}$$

δεν είναι 0. Αν οι θετικοί αριθμοί $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ είναι τέτοιοι ώστε $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n \geqslant |D|$ τότε υπάρχει ένα σημείο x με ακέραιες συντεταγμένες $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όχι όλες μηδέν, τέτοιο ώστε

$$|\lambda_p(x)| \leqslant \delta_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Παρατήρηση 5.2. Το θεώρημα ισχύει ακόμα και αν οι αριθμοί a_q^p είναι μιγαδικοί, υπό τις εξής προϋποθέσεισ:

1. οι μιγαδικοί να αποτελούν συζυγή ζεύγη,

2. τα δ_p που αντιστοιχούν σε συζυγείς μιγαδικούς να είναι ίσα.

Θεώρημα 5.3. *Έστω $E(\xi)$ ένα συμμετρικό τέλειο σύνολο στο $(0, 2\pi)$, με σταθερή αναλογία τομής ξ. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $E(\xi)$ σύνολο μοναδικότητας είναι ο $1/\xi$ να είναι αριθμός Pisot.*

Απόδειξη. Το αναγκαίο της συνθήκης προκύπτει από τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου. Αρκεί να δείξουμε τώρα το ικανό: αν ο ξ^{-1} είναι αριθμός Pisot τότε το $E(\xi)$ είναι U-σύνολο. Απλοποιούμε λίγο τις εξισώσεις, κατασκευάζοντας το $E(\xi)$ στο $[0, 1]$. Γραφούμε $\theta = 1/\xi$ και υποθέτουμε, φυσικά, ότι $\theta > 2$. Δεχόμαστε ότι ο θ είναι αριθμός Pisot, και συμβολίζουμε με n το βαθμό του. Θα δείξουμε ότι το $E(\xi)$ είναι τύπου $H^{(n)}$, και άρα, σύνολο μοναδικότητας.

Τα στοιχειά του $E(\xi)$ δίνονται από την

$$x = \varepsilon_1 r_1 + \cdots + \varepsilon_j r_j + \cdots,$$

όπου

$$r_j = \xi^{j-1}(1 - \xi) = \frac{1}{\theta^{j-1}} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) = \frac{\theta - 1}{\theta^j},$$

και $\varepsilon_j = 0$ ή 1. Επιπλέον,

$$x = (\theta - 1) \left(\frac{\varepsilon_1}{\theta} + \frac{\varepsilon_2}{\theta^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_j}{\theta^j} + \cdots \right).$$

Συμβολίζουμε με λ έναν θετικό αλγεβρικό ακέραιο στο σώμα του θ, τον οποίο θα ορίσουμε μετά. Επίσης, συμβολίζουμε με $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ τους συζυγείς του θ και με $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ τους συζυγείς του λ.

Έχουμε, αν x είναι ένα σταθερό στοιχείο του $E(\xi)$ και m ένας μη-αρνητικός ακέραιος,

$$\lambda\theta^m x = \lambda(\theta-1)\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\cdots\right)+R, \tag{5.1}$$

όπου

$$R = \lambda(\theta-1)(\varepsilon_1\theta^{m-1}+\varepsilon_2\theta^{m-2}+\cdots+\varepsilon_m).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο p,

$$\lambda(\theta-1)\theta^p+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i(a_i-1)a_i^p \equiv 0 \pmod 1.$$

Άρα,

$$\lambda(\theta-1)\theta^p \equiv -\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i(a_i-1)a_i^p.$$

Συνεπώς, έχοντας και ότι $|a_i|<1$, παίρνουμε

$$|R| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n-1}|\mu_i|\cdot\sum_{m=0}^{\infty}|a_i|^m = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{|\mu_i|}{1-|a_i|} \pmod 1. \tag{5.2}$$

Από την (5.1) γράφουμε το άθροισμα ως εξής:

$$\begin{aligned}\lambda\theta^m x &= \lambda(\theta-1)\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\cdots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)+\lambda(\theta-1)\left(\frac{\varepsilon_{m+N+1}}{\theta^{N+1}}+\cdots\right)+R\\ &= P+Q+R,\end{aligned} \tag{5.3}$$

όπου,

$$\begin{aligned}P &= \lambda(\theta-1)\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta}+\cdots+\frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)\\ Q &= \lambda(\theta-1)\left(\frac{\varepsilon_{m+N+1}}{\theta^{N+1}}+\cdots\right)\\ R &= \lambda(\theta-1)(\varepsilon_1\theta^{m-1}+\varepsilon_2\theta^{m-2}+\cdots+\varepsilon_m).\end{aligned}$$

Έχουμε

$$|Q| \leqslant \lambda(\theta-1)\frac{\theta^{-N-1}}{1-\theta^{-1}} = \frac{\lambda}{\theta^N}. \tag{5.4}$$

Επιλέγουμε λ με

$$\lambda = x_1+x_2\theta+\cdots+x_n\theta^{n-1},$$

όπου οι x_j είναι ακέραιοι. Τότε, προφανώς,

$$\mu_i = x_1+x_2a_i+\cdots+x_na_i^{n-1}, \qquad i=1,2,\ldots,n-1.$$

Από το θεώρημα του Minkowski καθορίζουμε τους ακέραιους x_i, έτσι ώστε

$$\text{(5.5)} \qquad \frac{\lambda}{\theta^n} \leqslant \frac{\sigma}{n2^{N/n}} \quad \text{και} \quad \frac{2|\mu_i|}{1-|a_i|} \leqslant \frac{\sigma}{n2^{N/n}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

όπου το σ θα το προσδιορίσουμε σύντομα.

Η ορίζουσα των

$$\frac{\lambda}{\theta^N} \quad \text{και} \quad \frac{|\mu_i|}{1-|a_i|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

γράφεται

$$\frac{\Delta}{\theta^N},$$

όπου Δ μη μηδενική ορίζουσα που εξαρτάται μόνο από το θ (είναι ανεξάρτητη του N), και γράφουμε $\Delta = \Delta(\theta)$.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Minkowski, αν έχουμε

$$\frac{\sigma^n}{n^n 2^N} > \frac{\Delta}{\theta^N},$$

και, αφού διαλέξουμε το σ, μπορούμε να προσδιορίσουμε το N έτσι ώστε η συνθήκη να ικανοποιείται, αφού $\theta > 2$.

Από τις (5.2), (5.3), (5.4) και (5.5) έχουμε ότι για οποιοδήποτε σταθερό $x \in E(\xi)$ και οποιονδήποτε φυσικό $m \geqslant 0$,

$$|\lambda\theta^m x - P| \leqslant \frac{\sigma}{2^{N/n}} \pmod 1.$$

Συνεπώς,

$$\text{(5.6)} \qquad \left|\lambda\theta^m x - \lambda(\theta-1)\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\theta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{m+N}}{\theta^N}\right)\right| \leqslant \frac{\sigma}{2^{N/n}} \pmod 1.$$

Συμβολίζουμε τώρα με g_m το κλασματικό μέρος του P (που εξαρτάται από τον m) και με O_k, όπου k τυχών φυσικός, το σημείο με συντεταγμένες τα $g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_{k+n}$. Δηλαδή,

$$O_k = (g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_{k+n}).$$

Το πλήθος των σημείων O_k εξαρτάται από τα k, n και την επιλογή των ε. Θα δείξουμε όμως ότι υπάρχουν το πολύ 2^{N+n-1} διακεκριμένα O_k.

Ιδιαίτερα παρατηρήστε ότι το g_{k+1} μπορεί να πάρει 2^N τιμές (ανάλογα με τα ε). Αλλά αν το g_{k+1} είναι σταθερό, τότε το g_{k+2} παίρνει μόνο δύο διαφορετικές τιμές και αν τα g_{k+1}, g_{k+2} είναι σταθερά τότε το g_{k+3} παίρνει μόνο δύο διαφορετικές τιμές. Συνεπώς, το πλήθος των σημείων O_k είναι το πολύ 2^{N+n-1}.

Έστω τώρα M_k το σημείο με συντεταγμένες

$$(\lambda j]\theta^{k+1}x), (\lambda\theta^{k+2}x), \ldots, (\lambda\theta^{k+n}x),$$

όπου το (z) συμβολίζει το κλασματικό μέρος του z. Το σημείο αυτό θεωρούμε ότι ανήκει στον n-διαστατο μοναδιαίο torus, και από την (5.6) είναι εσωτερικό σημείο ενός κύβου με πλευρά

$$\frac{2\sigma}{2^{N/n}}$$

και κέντρο το O_k. Το πλήθος των κύβων είναι το πολύ 2^{N+n-1} και ο συνολικός τους όγκος

$$2^{N+n-1}\frac{(2\sigma)^n}{2^N} = 2^{2n-1}\sigma^n = \frac{(4\sigma)^n}{2}.$$

Αν πάρουμε $\sigma \leqslant \frac{1}{4}$, θα παραμείνει στο torus, $0 \leqslant x_j < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, ένα «κελλί» χωρίς σημεία M_k. Αυτό ισχύει επίσης, για κάθε $k > k_0$, όπου το k_0 είναι αρκετά μεγάλο, για τα σημεία M_k' με συντεταγμένες

$$(c_{k+1}x), \ldots, (c_{k+n}x),$$

αν συμβολίσουμε γενικά με c_m τον πλησιέστερο ακέραιο στο $\lambda\theta^m$, αφού ξέρουμε ότι

$$\lambda\theta^m = c_m + \delta_m \quad \text{με} \;\; \delta_m \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Για να δείξουμε ότι το $E(\xi)$ είναι τύπου $H^{(n)}$ μένει μόνο να αποδείξουμε ότι η ακολουθία διανυσμάτων $V_k = (c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{k+n})$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι κανονική.

Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ φυσικοί αριθμοί, όχι όλοι μηδέν. Έχουμε

$$a_1c_{k+1} + \cdots + a_nc_{k+n} = \lambda(a_1\theta^{k+1} + \cdots + a_n\theta^{k+n}) + (a_1\delta_{k+1} + \cdots + a_n\delta_{k+n}).$$

Όταν $k \to \infty$, η τελευταία παρένθεση τείνει στο μηδέν. Επίσης,

$$\lambda(a_1\theta^{k+1} + \cdots + a_n\theta^{k+n}) = \lambda\theta^{k+1}(a_1 + a_2\theta + \cdots + a_n\theta^{n-1})$$

και η απολυτή τιμή της αυξάνει στο άπειρο όταν το k πάει στο άπειρο, καθώς το θ είναι βαθμού n, και άρα έχουμε

$$a_1 + a_2\theta + \cdots + a_n\theta^{n-1} \neq 0.$$

Έτσι ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Αποδείξαμε ότι αν ο θ είναι αριθμός Pisot και έχει βαθμό n τότε το $E(\xi)$ είναι τύπου $H^{(n)}$. Αλλά μπορεί το E να είναι και απλούστερου τύπου. Στην περίπτωση που ο θ είναι δευτέρου βαθμού, το θεώρημα μας δείχνει ότι E είναι τύπου $H^{(2)}$. Αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση, μπορεί να αποδειχθεί ότι το E είναι τύπου H.

Παρατήρηση 5.4 (ευστάθεια των συνόλων μοναδικότητας)**.** Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των αριθμών Pisot είναι κλειστό. Αν το $E(\xi_0)$ είναι σύνολο τύπου M, το ξ_0^{-1} ανήκει σε ένα ανοικτό διάστημα ξένο προς το σύνολο των αριθμών Pisot. Συνεπώς, υπάρχει γειτονιά του ξ_0 τέτοια ώστε όλοι οι αριθμοί που ανήκουν στην γειτονιά αυτήν, να δίνουν ξανά σύνολα τύπου M. Συνεπώς, ένα συμμετρικό τέλειο σύνολο τύπου M παρουσιάζει κάποια ευστάθεια για μικρές μεταβολές του ξ. Αντίθετα, αν το $E(\xi_0)$ είναι U-σύνολο τότε υπάρχουν στη γειτονιά του ξ_0, αριθμοί ξ τέτοιοι ώστε το $E(\xi)$ να είναι M-σύνολο. Τα σύνολα μοναδικότητας είναι «ασταθή» ως προς μικρές μεταβολές του ξ.

Μια σημείωση. Για την ομοιόμορφη κατανομή μιας ακολουθίας αριθμών modulo 1 μιλήσαμε στην πρώτη παράγραφο. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια ακολουθία $\{u_n\}$ να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1, είναι για κάθε συνάρτηση $f(x)$ περιοδική με περίοδο 1 και Riemann ολοκληρώσιμη, να ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(u_1)+\cdots+f(u_n)}{n}=\int_0^1 f(x)dx.$$

Ο H. Weyl έδειξε ότι μια ακολουθία $\{u_n\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1 αν και μόνον αν για κάθε ακέραιο $h\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2\pi i h u_1}+\cdots+e^{2\pi i h u_n}}{n}=0.$$

Στον p-διαστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^p$ η ακολουθία των διανυσμάτων $V_n=(v_n^1,\ldots,v_n^p)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1 στο torus $\mathbb{T}^p$, αν για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση

$$f(x)=f(x^1,\ldots,^n),$$

περιοδική με περίοδο 1 ως προς κάθε x^j, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(V_1)+\cdots+f(V_n)}{n}=\int_{\mathbb{T}^p} f(x)dx.$$

Το κριτήριο του Ωεψλ γίνεται

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2\pi i(HV_1)}+\cdots+e^{2\pi i(HV_n)}}{n}=0,$$

όπου (HV_n) είναι το βαθμωτό γινόμενο

$$h_1v_1^1+\cdots+h_nv_n^n,$$

όπου οι h_i είναι ακέραιοι, όχι όλοι μηδέν.

Αν τα $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_p$ και το 1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, το διάνυσμα

$$(n\omega_1,n\omega_2,\ldots,n\omega_p)$$

είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο modulo 1.

Αναφορές

[1] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Boston, Heath, 1963.

[2] A. Zygmund, *Τριγωνομετρικές Σειρές*, Πρώτη Έκδοση, Ηράκλειο 1995.

[3] *Σημειώσεις από το μάθημα Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue*, ακ. έτος 2014-2015.