Καλώς ήρθατε στην Ανάλυση Fourier

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH121/

19 Ιανουαρίου 2010

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Τριγωνομετρική Σειρά:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Τριγωνομετρικό πολυώνυμο:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

$a_k = b_k = 0$ όταν $k > N$. Βαθμός N αν $|a_N| + |b_N| \neq 0$.
Ισοδύναμη μορφή

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx)$$

όπου $\exp(it) \equiv \cos t + i \sin t$ $\qquad c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & k \geq 1 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & k \leq -1 \end{cases}$

Παράδειγμα 1.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \\ &= \begin{cases} \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2m\pi \\ 0, & x = 2m\pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \\ &= \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2m\pi \\ n + \frac{1}{2}, & x = 2m\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1. (συνέχεια)

Μολονότι οι δύο ακολουθίες δεν συγκλίνουν, είναι φραγμένες (όταν $x \neq 2k\pi$).

Αν $x \in (0, 2\pi)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leq \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad \text{και} \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Επιπλέον για κάθε $\delta > 0$ οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$: Για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leq \frac{1}{2\sin \frac{\delta}{2}} \quad \text{και} \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Παράδειγμα 2

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx = \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n^2} \sin nx$$

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \cos kx = \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2} \cos nx$$

Συγκλίνουν ομοιόμορφα σε συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διότι

Θεώρημα

Αν μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ (όπου $X \subseteq \mathbb{R}$) είναι ομοιόμορφα βασική[1]*, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα στο X. Αν επί πλέον οι f_n είναι συνεχείς στο X, τότε και το όριό τους είναι συνεχής συνάρτηση.*

[1] δηλαδή ικανοποιεί: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq n_o$ να ισχύει *για κάθε* $x \in X$ η ανισότητα $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Παράδειγμα 3

Παράδειγμα

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx$$

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos kx = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n} \cos nx$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν για κάθε $x \neq 2k\pi$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις. Αρκεί να περιορισθούμε στο $(0, 2\pi)$, εφόσον οι δύο ακολουθίες είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, άρα 2π-περιοδικές συναρτήσεις. (Παρατήρησε ότι για $x = 2k\pi$ η $(c_n(x))$ αποκλίνει.)

Εργαλεία

Πρόταση (Dirichlet)

Έστω (a_k) ***ακολουθία συναρτήσεων*** $a_k : X \to \mathbb{C}$ ***και*** (b_k) ***ακολουθία αριθμών.*** *Αν*

$$(i) \text{ υπάρχει } M < \infty \text{ ώστε } \forall t \in X, \forall n \in \mathbb{N}, : \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \right| \leq M,$$

$$(ii)\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$$

και $(iii)\ b_n \to 0,$

τότε η σειρά $\sum_k b_k a_k$ ***συγκλίνει ομοιόμορφα στο*** X.

Λήμμα (άθροιση κατά μέρη)

Αν $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ ***και*** $a_k \in \mathbb{C}$, ***τότε θέτοντας*** $s_0 = 0$ ***και*** $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, ***έχουμε για κάθε*** $m, n \in \mathbb{N}$ ***με*** $n > m \geq 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

Σειρές Fourier

Αν f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, πώς να βρώ τους συντελεστές;

Παρατήρηση

$$\text{Αν} \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx,$$

τότε

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mxdx \end{aligned}$$

Παρατήρηση (Μιγαδική μορφή)

$$\textit{Αν} \quad f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp ikx$$

τότε,

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-imx)dx, \quad -N \leq m \leq N.$$

Διότι αν $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx)dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Σειρές Fourier

Γενίκευση: Αν δοθεί 2π-περιοδική συνάρτηση f, ορίζουμε

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_m = b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx) dx, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

αρκεί τα ολοκληρώματα να υπάρχουν.

Ορισμός: Η **σειρά Fourier** $S(f)$ της f:

$$S(f, x) \equiv \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} (\text{μιγαδική μορφή})$$

(Δεν εξετάζουμε προς το παρόν αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν ή όχι)

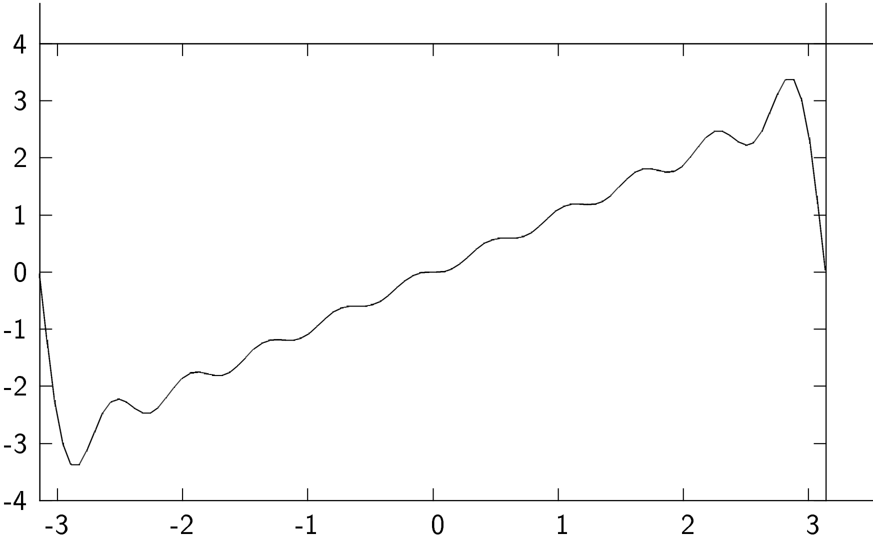
Παράδειγμα

Παράδειγμα (Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = t,\ t \in (-\pi, \pi)$)

$$f \sim 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \dots\right)$$

Όπως έχουμε δείξει, τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής σχηματίζουν βασική ακολουθία και επομένως η σειρά συγκλίνει. *Συγκλίνει όμως άραγε στην f;*

Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = t$, $t \in (-\pi, \pi)$



Το μερικό άθροισμα της σειράς μέχρι τον 10ο όρο.

Παρατήρηση

• *Η σειρά Fourier ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου είναι το ίδιο το τριγ. πολυώνυμο.*

• *Αν μια τριγωνομετρική σειρά* $f(x) = \sum_k c_k e^{ikx}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε οι συντελεστές Fourier της* f *είναι οι* c_k*, δηλαδή η σειρά Fourier της* f *είναι η ίδια η* f.

• *Δεν είναι όμως αλήθεια εν γένει ότι κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης (βλ. π.χ. [Απ 30.21]).*

Πρόταση (Γραμμικότητα)

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a_n(f+\lambda g) = a_n(f) + \lambda a_n(g), \quad b_n(f+\lambda g) = b_n(f) + \lambda b_n(g)$$
$$(n, m \in \mathbb{N})$$

$$\textit{ισοδύναμα} \quad \widehat{f+\lambda g}(k) = \hat{f}(k) + \lambda \hat{g}(k)\,(k \in \mathbb{Z})$$
$$\textit{ή} \;\; S_n(f+\lambda g) = S_n(f) + \lambda s_n(g)\,(n \in \mathbb{N}).$$

Πρόταση

Αν f συνεχής, 2π-περιοδική με ολοκληρώσιμη παράγωγο,

$$S(f', x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k b_k \cos kx - k a_k \sin kx).$$

$$\textit{Μιγαδική μορφή:} \quad \widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Σειρές Fourier

Παρατήρηση (Άσκηση I.3)

Αν μια ολοκληρώσιμη 2π-*περιοδική συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *είναι* ***άρτια***, *τότε η σειρά Fourier της είναι* ***σειρά συνημιτόνων*** *(δηλ.* $b_n(f) = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*).Αν είναι* ***περιττή***, *τότε η σειρά Fourier της είναι* ***σειρά ημιτόνων*** *(δηλ.* $a_n(f) = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*). Αν η* f *παίρνει* ***πραγματικές τιμές***, *τότε* $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

Απλές περιπτώσεις σύγκλισης

Πρόταση

Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum|\hat{f}(k)| < \infty$ (ισοδύναμα $\sum(|a_k(f) + |b_k(f)| < \infty$) τότε η $(S_N(f))$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πώς να συμπεράνω ότι συγκλίνει στην f;

Θεώρημα Μοναδικότητας

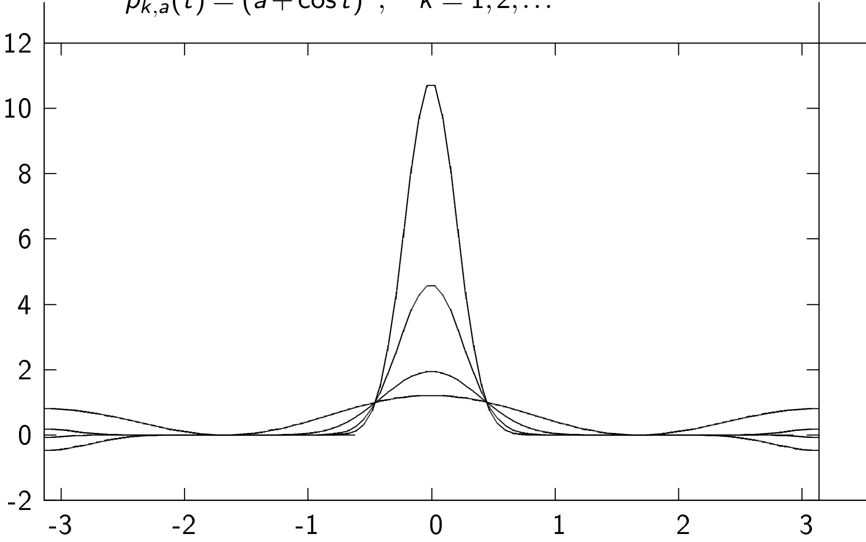
Θεώρημα

Αν f και g είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f = g$.

Θα δείξω ότι αν $f \neq g$, υπάρχει τριγ. πολυώνυμο p με $\int_{-\pi}^{\pi} fp \neq \int_{-\pi}^{\pi} gp$.

Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα $p_{k,a}$

$$p_{k,a}(t) = (a + \cos t)^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$



Τα τριγ. πολυώνυμα $p_{k,a}$ με $a = \frac{1}{10}$, $k = 2, 7, 16, 25$.

Το Θεώρημα του Féjer

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Υπενθύμιση: $S_n(f,t) = \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k) e^{ikt}$.

Η $(S_n(f))$ δεν είναι πάντα συγκλίνουσα (ούτε καν κατά σημείο).

Όμως,

Θεώρημα (Féjer)

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η ακολουθία $(\sigma_n(f))$ όπου

$$\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} S_n(f) \quad (m \in \mathbb{N})$$

συγκλίνει στην f ομοιόμορφα.

Αθροισιμότητα

$$
\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)\exp(ikt) \\
&= \sum_{k=-n}^{k=n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\exp(-iks)ds \right) \exp(ikt) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s)f(s)ds.
\end{aligned}
$$

άρα

$$
\begin{aligned}
\sigma_m(f)(t) &= \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} S_n(f)(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(t-s)f(s)ds.
\end{aligned}
$$

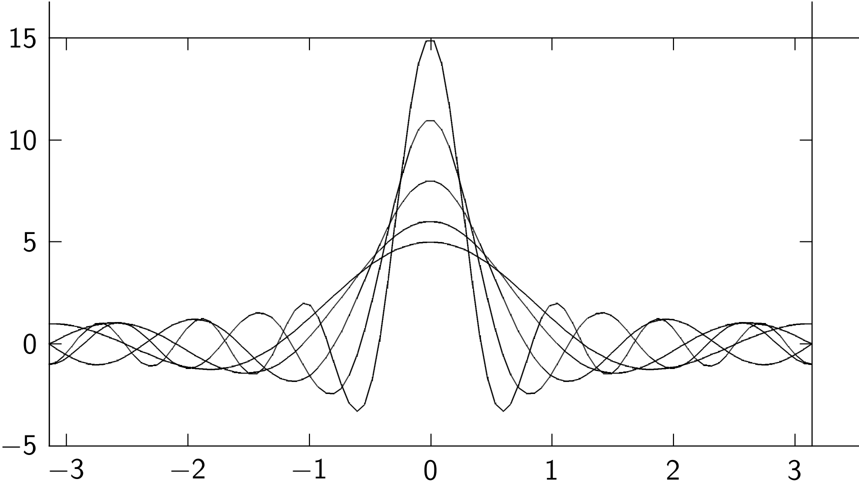
Δύο πυρήνες: Dirichlet εναντίον Féjer

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ikx) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}, \; x \neq 0, \\ \\ 2n+1, \; x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_m(x) &= \frac{1}{m+1}\left(\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx)\right) \\ &= \sum_{|k|\leq m}\left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right)\exp(ikx) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin(\frac{m+1}{2}x)}{\sin(x/2)}\right)^2, \; x \neq 0, \\ \\ m+1, \; x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ο πυρήνας του Dirichlet

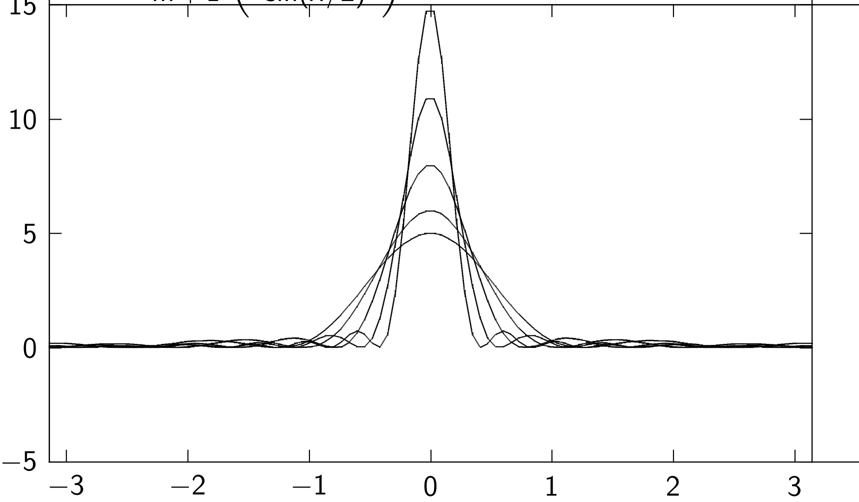
$$D_m(x) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}, \; x \neq 0, \quad D_m(0) = 2m+1.$$



$m = 4, 5, 7, 10, 14.$

Ο πυρήνας του Féjer

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin(\frac{m+1}{2}x)}{\sin(x/2)}\right)^2, \; x \neq 0, \quad K_m(0) = m+1.$$



$m = 4, 5, 7, 10, 14.$

Ιδιότητες του K_m

Παρατήρηση

Ο πυρήνας του Féjer έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) $K_m(x) \geq 0$ *για κάθε* x.

(β) *Αν* $\delta \in (0, \pi)$, *η ακολουθία* (K_m) *τείνει στο* 0 *ομοιόμορφα στο σύνολο* $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

(γ) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)dx = 1$ *για κάθε* m.

Απόδειξη Θεωρήματος Féjer

Αν $\delta > 0$, για αρκετά μεγάλο $m \in \mathbb{N}$ το $K_m(s)$ είναι σχεδόν 0 έξω απ'το διάστημα $[-\delta, \delta]$ (από το (β)). Συνεπώς

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) K_m(s) ds \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t-s) K_m(s) ds$$

όπου το σύμβολο $\approx$ εδώ σημαίνει «περίπου ίσο».Αλλά η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα αν το δ είναι αρκετά μικρό, όταν $|s| < \delta$ έχουμε $f(t-s) \approx f(t)$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t-s) K_m(s) ds \approx f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_m(s) ds \right)$$

και, πάλι από το (β),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_m(s) ds \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(s) ds = 1$$

από το (γ). Συνεπώς τελικά $\sigma_m(f)(t) \approx f(t)$.

Περίληψη: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, ολοκληρώσιμη, $f(-\pi) = f(\pi)$.

1. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f| \leq \|f\|_\infty$ και $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
2. Féjer: f συνεχής, $\implies \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$.
3. Féjer: $\exists f(x_+), f(x_-) \implies \sigma_n(f, x) \to \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$.
4. Μοναδικότητα: f, g συνεχείς στο x και $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f(x) = g(x)$.
5. Bessel: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty$.
6. Riemann – Lebesgue: $\lim_{|k| \to \infty} \hat{f}(k) = 0$.
7. f συνεχής $\implies \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 \to 0$.

8. $(f, g$ συνεχείς$)$ $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}.$

8α. Parseval: $(f$ συνεχής$)$ $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty.$

9. $f \in C^p\,(p\geq 1) \implies \exists M : \|S_n(f)-f\|_\infty \leq \frac{M}{n^{p-\frac{1}{2}}}.$

10. $[\exists M,\delta>0 : |t|<\delta \Rightarrow |f(x+t)-f(x)|\leq M|t|] \implies S_n(f,x)\to f(x).$
π.χ. υπάρχει f' και είναι φραγμένη εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων.

11. Τοπικότητα: $(a,b)\subset[-\pi,\pi]$:
$[\forall x\in(a,b) : f(x)=g(x)] \implies [\forall x\in(a,b) : S_n(f,x)-S_n(g,x)\to 0].$

Ο πυρήνας του Poisson

Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $0 \leq r < 1$, η σειρά

$$f_r(t) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα,

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(t-s) ds$$

$$\text{όπου} \quad P_r(t) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}$$

Θεώρημα

Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική, τότε $\lim_{r \nearrow 1} f_r(t) = f(t)$ ομοιόμορφα, δηλαδή $\lim_{r \nearrow 1} \|f_r - f\|_\infty = 0$.