10 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

Περιοριζόμαστε τώρα στην περίπτωση όπου $X = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, m το μέτρο Lebesgue και $\mathcal{M}(m)$ η οικογένεια των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της παραγράφου 6.2, έχουμε

$$\int_a^b h_{\mathcal{P}}(t)dt = L(f,\mathcal{P}), \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}}(t)dt = U(f,\mathcal{P}).$$

όπου

$$h_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=1}^n m_i(f)\chi_{I_i}(t), \quad g_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=1}^n M_i(f)\chi_{I_i}(t).$$

Επειδή οι συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$ και $g_{\mathcal{P}}$ είναι κλιμακωτές (άρα απλές μετρήσιμες), το ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue των συναρτήσεων αυτών συμπίπτουν.

Επιλέγουμε επαγωγικά διαμερίσεις $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \ldots \subseteq P_n \subseteq \ldots$ ώστε η «λεπτότητα» (δηλαδή η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων) της P_n να είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$ και

$$\int_a^b h_{\mathcal{P}_n} \to \sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P}) \equiv \underline{\int_a^b} f, \qquad \int_a^b g_{\mathcal{P}_n} \to \inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P}) \equiv \overline{\int_a^b} f.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(h_{\mathcal{P}_n}) = (h_n)$ είναι αύξουσα και η $(g_{\mathcal{P}_n}) = (g_n)$ είναι φθίνουσα και ότι $h_n \le f \le g_n$ για κάθε n. Θέτουμε $h = \sup_n h_n$ και $g = \inf_n g_n$. Οι h, g είναι μετρήσιμες και

$$h \le f \le g.$$

Χωρίς καμμιά υπόθεση για την f (εκτός του ότι είναι φραγμένη) από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int hdm = \lim_n \int h_n dm = \underline{\int_a^b} f \quad \text{και} \quad \int gdm = \lim_n \int g_n dm = \overline{\int_a^b} f.$$

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα

$$\int hdm = \int gdm.$$

Εφόσον $h \leq g$, η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$.

Τότε έχουμε και $h(x) = f(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$ οπότε η f είναι μετρήσιμη[1], μάλιστα Lebesgue-ολοκληρώσιμη και

$$\int f dm = \int h dm = \underline{\int_a^b} f$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα Lebesgue της f συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann.

Αποδεικνύεται ότι αν το $x \in [a, b]$ δεν ανήκει σε κανένα από τα διαχωριστικά σημεία καμμιάς από τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$ τότε η ισότητα $h(x) = f(x) = g(x)$ ισοδυναμεί με την συνέχεια της f στο x.

Επομένως, αν υπάρχει ένα σύνολο $M_1 \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε $h(x) = f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b] \backslash M_1$ και αν ονομάσουμε M την ένωση του M_1 με το (αριθμήσιμο) σύνολο όλων των σημείων όλων των διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε το M έχει μέτρο μηδέν και η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus M$, δηλαδή σχεδόν παντού. Αν αντίστροφα η f είναι συνεχής σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $N \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N$, τότε η ισότητα $h(x) = f(x) = g(x)$ ισχύει σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N$ που δεν είναι σημείο καμμιάς από τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$, δηλαδή σχεδόν παντού. Έπεται τότε ότι $\int h dm = \int g dm$, και συνεπώς το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$ υπάρχει.

Θεώρημα 10.1 *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.*

Παρατήρηση 10.2 *Ας τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια «σχεδόν παντού συνεχής» και «σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση»:*

Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet, δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών, δεν είναι πουθενά συνεχής, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$. Αντίθετα η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

[1] για κάθε $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in [a, b] : f(x) < c\}$ διαφέρει από το σύνολο $\{x \in [a, b] : h(x) < c\}$ κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν, άρα είναι μετρήσιμο, γιατί τα σύνολα μέτρου μηδέν ανήκουν στην $\mathcal{M}(m)$. [Πράγματι, (βλ. Παράγραφο 7.2) αν $m^*(A) = 0$, τότε από τον ορισμό του m^* για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα σύνολο U που είναι αριθμήσιμη ένωση στοιχειωδών ανοικτών συνόλων, άρα μετρήσιμο, ώστε $A \subseteq U$ και $m(U) < \epsilon$, άρα $d(A, U) = m^*(A \Delta U) < \epsilon$.]

είναι σχεδόν παντού συνεχής (αφού είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$), αλλά δεν μπορεί να είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση, γιατί έχει άλμα στα δυο αυτά σημεία.

11 Ο χώρος $L^2([-\pi, \pi])$

11.1 Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων

Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ θα λέγεται **μετρήσιμη** αν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί[2] ότι τότε η πραγματική συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη.

Η f θα λέγεται **ολοκληρώσιμη** ($f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$) αν οι u, v είναι ολοκληρώσιμες (αν δηλαδή $\int |u| d\mu < \infty$ και $\int |v| d\mu < \infty$). Τότε ορίζουμε

$$\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η απεικόνιση $f \to \int f d\mu$ είναι γραμμική, δηλαδή ότι $\int (f + cg) d\mu = \int f d\mu + c \int g d\mu$ για κάθε $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$ και $c \in \mathbb{C}$. Από τις σχέσεις $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$ και $|f| \leq |u| + |v|$ φαίνεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Ισχύει η ανισότητα

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Απόδειξη Κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται $z = c|z|$ όπου $|c| = 1$. Γράφουμε λοιπόν

$$\int f d\mu = c \left| \int f d\mu \right|$$

όπου $|c| = 1$ και έχουμε

$$\left| \int f d\mu \right| = \bar{c} \int f d\mu = \int \bar{c} f d\mu.$$

[2] Αν οι u και v είναι μετρήσιμες το ίδιο ισχύει για την $|f|^2 = u^2 + v^2$ (βλ. Παράγραφο 8). Επομένως για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $M_a = \{x : |f|^2 > a^2\}$ είναι μετρήσιμο. Συνεπώς για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $N_a = \{x : |f| > a\}$ είναι μετρήσιμο, διότι $N_a = M_a$ αν $a > 0$ και $N_a = X$ αν $a \leq 0$.

Θέτουμε $\operatorname{Re}\bar{c}f = g$, $\operatorname{Im}\bar{c}f = h$ οπότε $\bar{c}f = g + ih$ και

$$\left|\int f d\mu\right| = \int \bar{c} f d\mu = \int g d\mu + i \int h d\mu = \int g d\mu$$

γιατί $\left|\int f d\mu\right| \in \mathbb{R}$. Όμως $|g| \leq |\bar{c}f| = |f|$ άρα $\int |g| d\mu \leq \int |f| d\mu$. Τελικά λοιπόν

$$\left|\int f d\mu\right| = \int g d\mu \leq \int |g| d\mu \leq \int |f| d\mu. \qquad \square$$

11.2 Ο χώρος $L^2([-\pi, \pi])$

Ορισμός 11.1 *Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν*

$$\int |f|^2 d\mu < \infty.$$

Παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι γραμμικός χώρος. Πράγματι αν $\int |f|^2 d\mu < \infty$ και $\int |g|^2 d\mu < \infty$ τότε για κάθε $c \in \mathbb{C}$ η συνάρτηση $|f + cg|^2$ είναι μετρήσιμη και

$$|f + cg|^2 \leq 2|f|^2 + 2|cg|^2$$

$$\text{άρα} \quad \int |f + cg|^2 d\mu \leq 2 \int |f|^2 d\mu + 2|c|^2 \int |g|^2 d\mu < \infty.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ τότε η συνάρτηση fg είναι ολοκληρώσιμη, γιατί $|fg| \leq |f|^2 + |g|^2$ άρα $\int |fg| d\mu \leq \int |f|^2 d\mu + \int |g|^2 d\mu < \infty$.

Άσκηση 11.1 ***(α)*** *Δείξτε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{L}^2([a, b], m)$ τότε* $f \in \mathcal{L}([a, b], m)$. (Υπόδειξη: Ανισότητα Cauchy - Schwarz.)
(β) *Αν $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f(t) = t^{-1/2}$, εξετάστε αν η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$ και αν $f \in \mathcal{L}^2((0, 1), m)$.*
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την ακολουθία (f_n) όπου $f_n(t) = 0$ όταν $0 < t < \frac{1}{n}$ και $f_n(t) = f(t)$ όταν $\frac{1}{n} \leq t < 1$.)

Παρατήρηση 11.2 *Αν περιορισθούμε στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ (ή γενικότερα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$) παρατηρούμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ανήκει στον $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$. Το ίδιο ισχύει για τις Riemann ολοκληρώσιμες, ή γενικότερα για τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις. Υπάρχουν όμως $\mathcal{L}^2$*

συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες (πόσο μάλλον Riemann ολοκληρώσιμες): ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = t^{-1/4}$ για κάθε $t \neq 0$ και $g(0) = 0$. Επίσης, όπως προκύπτει από την προηγούμενη Άσκηση, κάθε $\mathcal{L}^2$ συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, ενώ δεν ισχύει το αντίστροφο. Έχουμε λοιπόν, αν συμβολίσουμε με $B([-\pi, \pi])$ τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις και με $R([-\pi, \pi])$ τις Riemann ολοκληρώσιμες,

$$C([-\pi,\pi]) \subset R([-\pi,\pi]) \subset B([-\pi,\pi]) \subset \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],m) \subset \mathcal{L}([-\pi,\pi],m)$$

και κανένας από τους εγκλεισμούς δεν είναι ισότητα.

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ (όπου m το μέτρο Lebesgue) θέτουμε

$$d_2(f,g) \equiv \|f-g\|_2 \equiv \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2 dm \right)^{1/2}.$$

(Στην περίπτωση που οι f, g είναι συνεχείς, το ολοκλήρωμα ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann και ο ορισμός συμπίπτει με αυτόν που δώσαμε στην Παράγραφο 5).

Όπως στην Παράγραφο 5, αποδεικνύονται οι ιδιότητες

$$\begin{aligned}
&\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{L}^2) \\
&\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g} dm \right| \equiv |\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \qquad (f, g \in \mathcal{L}^2) \\
&\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \qquad (f, g \in \mathcal{L}^2) \\
&\|f\|_2 \geq 0 \qquad (f \in \mathcal{L}^2).
\end{aligned}$$

Όμως, αν $\|f\|_2 = 0$ δεν προκύπτει $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, αλλά μόνον *σχεδόν για κάθε* t.

Άρα η d_2 δεν είναι μετρική στον χώρο $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$. Για να έχουμε τη δομή μετρικού χώρου, πρέπει να «ταυτίσουμε» συναρτήσεις που διαφέρουν σε σύνολα μέτρου μηδέν. Με αυστηρή μαθηματική διατύπωση, αυτό ισοδυναμεί με το να θεωρούμε τον χώρο $L^2([-\pi, \pi], m)$ όλων των *κλάσεων ισοδυναμίας* συναρτήσεων του χώρου $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$, όπου η κλάση ισοδυναμίας μιας $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ αποτελείται από όλες τις $g \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], m)$ που είναι σχεδόν παντού ίσες με την f (ισοδύναμα ικανοποιούν $d_2(f, g) = 0$).

Ορισμός 11.2 *Ο χώρος $L^2(X,\mathcal{M},\mu)$ αποτελείται από όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ (modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού) που ικανοποιούν*

$$\int |f|^2 d\mu < \infty.$$

Θεώρημα 11.3 (Riesz-Fischer) *Ο χώρος $L^2(X,\mathcal{M},\mu)$, εφοδιασμένος με την μετρική d_2, είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

(Για την απόδειξη, δες την επόμενη παράγραφο.)

Πρόταση 11.4 *Ο χώρος των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^2(X,\mathcal{M},\mu)$ ως προς την d_2, δηλαδή για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(X,\mathcal{M},\mu)$ υπάρχει μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων (s_n) ώστε $\|f - s_n\|_2 \to 0$.*

Απόδειξη Γράφουμε $f = u+iv = (u^+-u^-)+i(v^+-v^-)$ όπου οι u^+, u^-, v^+, v^- είναι μη αρνητικές και ανήκουν στον $\mathcal{L}^2$. Κάθε μια από αυτές προσεγγίζεται κατά σημείο από μια αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων (Θεώρημα 8.7):

$$t_n^+ \nearrow u^+, \quad t_n^- \nearrow u^-, \quad r_n^+ \nearrow v^+, \quad r_n^- \nearrow u^-.$$

Αν λοιπόν θέσουμε

$$s_n = (t_n^+ - t_n^-) + i(r_n^+ - r_n^-)$$

τότε έχουμε μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $s_n \to f$ κατά σημείο και επιπλέον

$$\begin{aligned} |s_n|^2 &= (t_n^+ - t_n^-)^2 + (r_n^+ - r_n^-)^2 \le (t_n^+ + t_n^-)^2 + (r_n^+ + r_n^-)^2 \\ &\le (u^+ + u^-)^2 + (v^+ + v^-)^2 = |f|^2 \\ \text{άρα} &\qquad |f - s_n|^2 \le (|f| + |s_n|)^2 \le 4|f|^2. \end{aligned}$$

Εφόσον η συνάρτηση $4|f|^2$ είναι ολοκληρώσιμη, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι
$\int |f - s_n|^2 d\mu \to 0.$ $\square$

Θεώρημα 11.5 *Ο χώρος των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2([-\pi,\pi],m)$ ως προς την μετρική d_2.*

Δηλαδή για κάθε $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],m)$ υπάρχει ακολουθία (g_n) συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων ώστε

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f - g_n|^2 dm \to 0.$$

Απόδειξη Αφού οι απλές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι πυκνές από την προηγούμενη Πρόταση, αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι απλή μετρήσιμη. Αφού ο $L^2([-\pi,\pi],m)$ είναι γραμμικός χώρος, και κάθε απλή είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών, αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι η χαρακτηριστική ενός μετρήσιμου συνόλου.

(ι) Έστω πρώτα $F \subseteq [-\pi,\pi]$ κλειστό. Θα βρούμε $g_n \in C([-\pi,\pi])$ με $g_n(-2\pi) = 1 = g_n(2\pi)$ ώστε $\|g_n - \chi_F\|_2 \to 0$. Έστω $F_1 = F \cup \{\pi, -\pi\}$ και

$$d(t) = \inf\{|t-s| : s \in F_1\} \qquad (t \in [a,b])$$

η απόσταση του t από το F_1. Είναι γνωστό (αφού το F_1 είναι κλειστό) ότι η d είναι συνεχής και ότι $d(t) = 0$ αν και μόνον αν $t \in F_1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$g_n(t) = \frac{1}{1+nd(t)} \qquad (t \in [a,b]).$$

Παρατηρούμε ότι αν $t \in F_1$ τότε $g_n(t) = 1$ για κάθε n και αν $t \notin F_1$ τότε $g_n(t) \to 0$. Δηλαδή $g_n(t) \to \chi_{F_1}(t)$ για κάθε t, άρα $g_n(t) \to \chi_F(t)$ *σχεδόν* για κάθε t. Επίσης $|g_n(t) - \chi_F(t)|^2 \leq 4$ για κάθε t, και η σταθερή συνάρτηση 4 είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$ (γιατί $m([-\pi,\pi]) < \infty$). Έπεται ότι

$$\int |g_n - \chi_F|^2 dm \to 0$$

από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

(ιι) Έστω τώρα $A \in \mathcal{M}$. Από την κανονικότητα του m για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F_n \subseteq A$ ώστε $m(A \setminus F_n) < \frac{1}{n^2}$. Έχουμε

$$\int |\chi_A - \chi_{F_n}|^2 dm = \int |\chi_{A\setminus F_n}|^2 dm = m(A \setminus F_n) < \frac{1}{n^2}.$$

Από το (ι), υπάρχει $g_n \in C([-\pi,\pi])$ 2π-περιοδική ώστε $\|g_n - \chi_{F_n}\|_2 < \frac{1}{n}$, οπότε

$$\|g_n - \chi_A\|_2 \leq \|g_n - \chi_{F_n}\|_2 + \|\chi_{F_n} - \chi_A\|_2 < \frac{2}{n}. \qquad \square$$

Πόρισμα 11.6 *Ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνός στον $L^2([-\pi,\pi],m)$ ως προς την d_2.*

Απόδειξη Αν δοθεί $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],m)$ και $\varepsilon > 0$, βρες μια 2π-περιοδική $g \in C([-\pi,\pi])$ ώστε $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. Από το Θεώρημα του Féjer (Θεώρημα

4.2) ξέρουμε ότι $\|g-\sigma_n(g)\|_\infty \to 0$, οπότε μπορούμε να διαλέξουμε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\sigma_n(g)$ ώστε $\|g-\sigma_n(g)\|_\infty < \varepsilon$. Αλλά $\|g-\sigma_n(g)\|_2 \le \|g-\sigma_n(g)\|_\infty$, οπότε θα έχουμε $\|f-\sigma_n(g)\|_2 < 2\varepsilon$. $\square$

Πόρισμα 11.7 *Ο χώρος $C^\infty([-\pi,\pi])$ των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^2([-\pi,\pi],m)$ ως προς την d_2.*

Απόδειξη Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις. $\square$

11.3 Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^2$

Έστω $f \in \mathcal{L}([-\pi,\pi],m)$. Αν $e_k(t) = e^{ikt}$ όπου k ακέραιος, παρατηρούμε ότι η e_k είναι συνεχής, άρα μετρήσιμη και $|e_k| = 1$ άρα η fe_k είναι ολοκληρώσιμη. Το ίδιο ισχύει και αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],m)$.

Ορισμός 11.3 (Συντελεστές Fourier) *Έστω $f \in \mathcal{L}([-\pi,\pi],m)$. Ορίζουμε*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fe_{-k}dm = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dm(t) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dm(t), \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dm(t) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N},\, t \in [-\pi,\pi]).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, άρα συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση, όποια κι αν είναι η $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],m)$.

Λήμμα 11.8 (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης) *Έστω $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-p|^2 dm \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-S_n(f)|^2 dm.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.

Η **Απόδειξη** είναι λέξη προς λέξη η ίδια με την απόδειξη του Λήμματος 5.3.

Πρόταση 11.9 *Αν η $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, τότε*

$$S_n(f) \xrightarrow{d_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)-f|^2 dm = 0.$$

Απόδειξη Από το Πόρισμα 11.6 για κάθε $\epsilon > 0$ μπορώ να βρώ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $d_2(f,p) < \epsilon$. Αν n είναι ο βαθμός του p, από το προηγούμενο Λήμμα θα έχω $d_2(f, S_n(f)) \le d_2(f,p) < \epsilon$. $\square$

Ας θυμηθούμε ότι με το Θεώρημα 3.2 είχαμε αποδείξει ότι αν δύο **συνεχείς** 2π-περιοδικές συναρτήσεις έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, τότε είναι ίσες. Αυτό δεν ισχύει για Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις: μπορεί να διαφέρουν σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Δεν μπορεί όμως να διαφέρουν σε ένα σύνολο θετικού μέτρου:

Θεώρημα 11.10 (Μοναδικότητα) *Αν $f, g \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ και $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$), τότε $f(t) = g(t)$ σχεδόν για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$, ισοδύναμα $f \equiv g$ στον $L^2([-\pi,\pi])$.*

Παρατήρηση Το θεώρημα μοναδικότητας ισχύει και για συναρτήσεις που ανήκουν στον $\mathcal{L}([-\pi,\pi], m)$, η απόδειξη όμως ξεπερνάει τους στόχους αυτών των σημειώσεων, γι'αυτό παραλείπεται.

Απόδειξη Θεωρώντας την $f-g$ στη θέση της f, αρκεί να αποδείξω ότι

Αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ και $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,
τότε $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$.

Από την Πρόταση 11.9 έχουμε ότι

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)-f|^2 dm = 0.$$

Αν όμως $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $S_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\int |f|^2 dm = 0$ άρα $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t. $\square$

Πρόταση 11.11 (Ισότητα Parseval) *Αν* $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη Έπεται από την αντίστοιχη ισότητα για τριγωνομετρικά πολυώνυμα (Παρατήρηση 5.5) και από το γεγονός ότι $S_n(f) \xrightarrow{d_2} f$, ακριβώς όπως στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων (Πόρισμα 5.8).

Θεώρημα 11.12 (Riemann - Lebesgue) *Αν* $f \in \mathcal{L}([-\pi,\pi],m)$, *τότε*

$$\lim_{k\to+\infty}\hat{f}(k) = \lim_{k\to-\infty}\hat{f}(k) = 0.$$

Απόδειξη Αν $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],m)$, η απόδειξη είναι άμεση από το γεγονός ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 < \infty$$

(μάλιστα αρκεί, για την απόδειξη, η ανισότητα Bessel).

Όμως αν $f \in \mathcal{L}([-\pi,\pi],m)\setminus\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],m)$ οι συντελεστές Fourier της f δεν είναι τετραγωνικά αθροίσιμοι (όπως θα δούμε στην αμέσως επόμενη Πρόταση). Επομένως χρειάζεται μια διαφορετική απόδειξη.

Έστω λοιπόν $f \in \mathcal{L}([-\pi,\pi],m)$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει g συνεχής και 2π-περιοδική ώστε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-g|d\mu < \epsilon$ (αυτό αποδεικνύεται ακριβώς όπως στο Θεώρημα 11.5). Παρατηρούμε ότι *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}|\hat{f}(k)-\hat{g}(k)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-g(t))e^{-ikt}dm(t)\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|(f(t)-g(t))e^{-ikt}\right|dm(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-g|\,dm < \epsilon\end{aligned}$$

Εφόσον η ακολουθία $(\hat{g}(k))$ είναι μηδενική (αφού $g \in \mathcal{L}^2$) και η $(\hat{f}(k))$ είναι *ομοιόμορφα* κοντά στην $(\hat{g}(k))$, θα είναι κι αυτή μηδενική. Ακριβέστερα: υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|\hat{g}(k)| < \epsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \geq n$, οπότε

$$|\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(k)-\hat{g}(k)| + |\hat{g}(k)| < 2\epsilon$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \geq n$, άρα

$$\lim_{k\to+\infty}\hat{f}(k) = \lim_{k\to-\infty}\hat{f}(k) = 0. \qquad \square$$

Από την ισότητα Parseval έπεται ότι για κάθε $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ (άρα και για κάθε συνεχή και 2π-περιοδική συνάρτηση), η ακολουθία των συντελεστών Fourier της είναι τετραγωνικά αθροίσιμη.

Από την πληρότητα του χώρου $L^2([-\pi,\pi])$ ως προς την d_2 έπεται το ακόλουθο αντίστροφο της παρατήρησης αυτής.

Πρόταση 11.13 *Αν* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ *τότε υπάρχει* $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ *ώστε* $\hat{f}(k) = c_k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$. *Μάλιστα αν* $s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ *ισχύει ότι* $\|f - s_n\|_2 \to 0$.

Απόδειξη Στην ακολουθία $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ αντιστοιχούμε την τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

(Δεν ενδιαφερόμαστε αν η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε t). Θα δείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει *ως προς την* d_2, οπότε ορίζει ένα στοιχείο του χώρου $L^2([-\pi,\pi])$. Από την πληρότητα του χώρου $L^2([-\pi,\pi])$ ως προς την d_2, αρκεί να δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αποτελούν βασική ακολουθία.

Έστω $\epsilon > 0$. Θέτω $a_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$. Αφού $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$, από το κριτήριο Cauchy έχουμε ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_o$ να ισχύει $|a_m - a_n| < \epsilon$ δηλαδή $\displaystyle\sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 < \epsilon$.

Από την ισότητα Parseval έχουμε

$$\sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n<|k|\leq m} c_k e^{ikt} \right|^2 dt.$$

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$ με $m > n$,

$$s_n = \sum_{|k|\leq n} c_k e_k \qquad \text{άρα} \qquad s_m - s_n = \sum_{n<|k|\leq m} c_k e_k.$$

Συνεπώς

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n<|k|\leq m} c_k e^{ikt} \right|^2 dt = \sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 < \epsilon.$$

Επομένως η ακολουθία (s_n) είναι βασική στον χώρο $L^2([-\pi,\pi])$. Υπάρχει λοιπόν $f \in L^2([-\pi,\pi])$ ώστε $d_2(s_n, f) \to 0$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s_n(t)|^2 dm(t) \to 0.$$

Έπεται τώρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν $n > |k|$,

$$|\hat{f}(k) - c_k| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - s_n(t))e^{-ikt} dm(t) \right|^2 \le \|f - s_n\|_2 \|e_k\|_2$$

και επειδή $\|e_k\|_2 = 1$ και $\|f - s_n\|_2 \to 0$ έχουμε τελικά $|\hat{f}(k) - c_k| = 0$. □

12 Το Θεώρημα Riesz-Fischer

Θεώρημα 12.1 (Riesz-Fischer) *Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ που είναι βασική ως προς την $\|.\|_2$. Τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ ώστε $f_n \to f$ ως προς την $\|.\|_2$. Μάλιστα η f είναι το όριο μ-σχεδόν παντού μιας* υπακολουθίας *της (f_n).*

Απόδειξη (ι) Εφόσον οι διαφορές $\|f_n - f_m\|_2$ «τείνουν στο 0», υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) ώστε $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 < +\infty$. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια υπακολουθία συγκλίνει μ-σ.π. σε μια $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε επαγωγικά γνησίως αύξουσα ακολουθία (n_k) ώστε

$$\|f_m - f_n\|_2 < \frac{1}{2^k} \quad (m, n \ge n_k) \tag{*}$$

Για ευκολία θέτουμε $h_k = f_{n_k}$,

$$g_k = |h_2 - h_1| + \ldots + |h_{k+1} - h_k|$$

και

$$g = \sup_k g_k = \lim_k g_k = \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k|.$$

Έστω $\phi \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu)$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\int |\phi(h_k - h_{k+1})| d\mu \le \|\phi\|_2 \|h_k - h_{k+1}\|_2 < \frac{\|\phi\|_2}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |\phi(h_k - h_{k+1})| d\mu \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|\phi\|_2 = \|\phi\|_2.$$

Τότε από το Θεώρημα B. Levi,

$$\int |\phi g| d\mu = \int \sum_{k=1}^{\infty} |\phi(h_{k+1} - h_k)| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int |\phi(h_{k+1} - h_k)| d\mu \le \|\phi\|_2 < \infty\,.$$

Έπεται ότι η g είναι σ.π. πεπερασμένη, γιατί αν $g(x) = +\infty$ σε ένα μετρήσιμο σύνολο E με θετικό (πεπερασμένο) μέτρο, θέτοντας $\phi = \chi_E$ θα βρίσκαμε $\int \phi g d\mu = +\infty$. Με άλλα λόγια, υπάρχει $A \in \mathcal{M}$ με $\mu(A^c) = 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ η ακολουθία $(g_k(x))$ να συγκλίνει σε πεπερασμένο όριο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+1}(x) - h_k(x))$$

συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει, σε πραγματικό αριθμό. Αλλά

$$h_{k+1}(x) = h_1(x) + (h_2(x) - h_1(x)) + \ldots + (h_{k+1}(x) - h_k(x))\,,$$

άρα η $(h_k(x))$ συγκλίνει για κάθε $x \in A$, οπότε θέτοντας

$$f(x) = \begin{cases} \lim_k h_k(x) = \lim_k f_{n_k}(x), & \text{αν } \ x \in A \\ 0, & \text{αν } \ x \in A^c \end{cases}$$

έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση f στο X.

(ιι) Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι το όριο ως προς την $\|.\|_2$ ολόκληρης της ακολουθίας (f_n).

Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε k_o ώστε $\frac{1}{2^{k_o}} < \varepsilon$ οπότε από την (*) έχουμε

$$\|f_m - f_n\|_2 < \varepsilon \qquad (m, n \ge n_{k_o}).$$

Συνεπώς αν $k \ge k_o$ και $m \ge n_{k_o}$ τότε

$$\|f_m - f_{n_k}\|_2 < \varepsilon.$$

Έστω $m \ge n_{k_o}$. Αφού $|f - f_m| = \lim_k |f_{n_k} - f_m|$ σ.π. έχουμε (Λήμμα Fatou),

$$\int |f - f_m|^2 d\mu = \int \liminf_k |f_{n_k} - f_m|^2 d\mu \le \liminf_k \int |f_{n_k} - f_m|^2 d\mu \le \varepsilon^2.$$

Αυτό δείχνει ότι $f - f_m \in \mathcal{L}^2$, άρα $f \in \mathcal{L}^2$, και ότι

$$\|f_m - f\|_2 \le \varepsilon.$$