6 Εισαγωγή στο ολοκλήρωμα Lebesgue

6.1 Παρατηρήσεις στο ολοκλήρωμα Riemann

Ασκήσεις 6.1 ***(ι)*** *Αν $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ υπάρχει ακολουθία (f_n) από R-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις*

- *ώστε $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$;*
- *μπορείτε να βρείτε τέτοιες f_n συνεχείς;*
- *μπορείτε να βρείτε τέτοιες f_n ώστε $\int_0^1 |f_n - f_m| \to 0$ καθώς $n, m \to \infty$;*

(ιι) *Αν η f είναι R-ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ και $\int |f(t)|dt = 0$, πόσο «μεγάλο» μπορεί να είναι το σύνολο*

$$N(f) = \{t \in [0,1] : f(t) \neq 0\};$$

- *Μπορεί να είναι άπειρο;*
- *Υπεραριθμήσιμο;*
- *Μπορεί να περιέχει ανοικτά διαστήματα (εκτός του κενού);*

Παρατήρηση 6.2 Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, τότε $\int f_n \to \int f$.

Αν όμως $f_n \to f$ κατά σημείο, τότε δεν έπεται ότι $\int f_n \to \int f$. Παράδειγμα: $f_n(t) = nt(1-t^2)^n$: εδώ $f_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$, αλλά $\int_0^1 f_n \to \frac{1}{2}$. Επίσης αν $g_n = nf_n$, πάλι $g_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$, αλλά $\int_0^1 g_n \to \infty$.

Άσκηση 6.3 *Αν $\int_0^1 f_n \to 0$, είναι αλήθεια ότι $f_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$;*

Αν επιπλέον $f_n(t) \geq 0$ για κάθε n και t;

6.2 Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$

$$\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$$

σε ξένα ανά δύο διαστήματα $I_k = [t_{k-1}, t_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ και $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in I_i\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in I_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \\ U(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Τα $L(f, \mathcal{P})$ και $U(f, \mathcal{P})$ ονομάζονται **το κάτω και άνω άθροισμα Riemann** της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Είναι σαφές ότι $L(f, \mathcal{P}) \le U(f, \mathcal{P})$. Θεωρώντας διαδοχικά διαμερίσεις με όλο και περισσότερα σημεία, θα παρατηρήσουμε ότι τα κάτω αθροίσματα μεγαλώνουν, παραμένοντας όμως όλα μικρότερα (ή ίσα) από κάθε άνω άθροισμα, ενώ τα άνω αθροίσματα μικραίνουν, παραμένοντας όμως όλα μεγαλύτερα (ή ίσα) από κάθε κάτω άθροισμα. Αν υπάρχει *ένας και μοναδικός* αριθμός I ανάμεσα στα κάτω και τα άνω αθροίσματα, δηλαδή τέτοιος ώστε να ισχύει $L(f, \mathcal{P}) \le I \le U(f, \mathcal{Q})$ για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$, τότε αυτός ο αριθμός ονομάζεται το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ δεν υπάρχει. Τα αθροίσματα Riemann λοιπόν αποτελούν κάτω και άνω προσεγγίσεις[1] του ολοκληρώματος Riemann, όταν αυτό υπάρχει.

Πρόταση 6.4 (Κριτήριο Riemann) *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon$ του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f, \mathcal{P}_\epsilon) - L(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \varepsilon. \tag{1}$$

[1] Μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι, είτε υπολογίσει τα άνω και κάτω αθροίσματα χρησιμοποιώντας ημι-άνοιχτα διαστήματα (όπως εδώ) είτε τα υπολογίσει χρησιμοποιώντας κλειστά διαστήματα, η ύπαρξη και η τιμή του ολοκληρώματος της f δεν επηρεάζονται.

Ισοδύναμα:

Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ ορίζουμε **κλιμακωτές** συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$, $g_{\mathcal{P}}$ ως εξής: κάθε $t \in [a,b]$ ανήκει ακριβώς σε ένα από τα I_i και θέτουμε

$$h_{\mathcal{P}}(t) = m_i(f), \;\; g_{\mathcal{P}}(t) = M_i(f), \quad t \in I_i \; (i = 1, \ldots, n)$$

δηλαδή

$$h_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\chi_{I_i}(t), \quad g_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\chi_{I_i}(t)$$

όπου $\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$ η **χαρακτηριστική συνάρτηση** του συνόλου A. Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$h_{\mathcal{P}}(t) \leq f(t) \leq g_p(t) \quad \text{για κάθε} \;\; t \in [a,b]$$

$$\text{και} \quad \int_a^b h_{\mathcal{P}}(t)dt = L(f,\mathcal{P}), \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}}(t)dt = U(f,\mathcal{P}).$$

Επομένως το κριτήριο Riemann αναδιατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 6.5 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις $g_\epsilon, h_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $g_\epsilon \leq f \leq h_\epsilon$ και $\int_a^b (h_\epsilon - g_\epsilon) < \epsilon$.*

Το ολοκλήρωμα λοιπόν της f υπολογίζεται (όταν υπάρχει) προσεγγίζοντας την f με κλιμακωτές συναρτήσεις και υπολογίζοντας το όριο των ολοκληρωμάτων τους. Το πρόβλημα είναι ότι, αν η f μεταβάλλεται πολύ «απότομα» στα υποδιαστήματα του $[a,b]$ μπορεί η διαφορά $\int_a^b (h_{\mathcal{P}} - g_{\mathcal{P}})$ να μην γίνεται ποτέ «μικρή», όσο και να εκλεπτύνει κανείς την διαμέριση του $[a,b]$. Για παράδειγμα αν f είναι η συνάρτηση Dirichlet, δηλαδή η χαρακτηριστική των ρητών, τότε, αφού κάθε μη τετριμένο διάστημα περιέχει και ρητούς και αρρήτους, έχουμε πάντα $\int_a^b (h_{\mathcal{P}} - g_{\mathcal{P}}) = 1$.

Η βασική ιδέα για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι η ακόλουθη: αντί να διαμερίζουμε το *πεδίο ορισμού* $[a,b]$ της f, διαμερίζουμε το *πεδίο τιμών* της f σε ξένα ανά δύο διαστήματα $J_1 = [m_0, m_1), J_2 = [m_1, m_2), \ldots, J_n = [m_{n-1}, m_n]$ και θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$L_l(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i-1}\mu(f^{-1}(J_i))$$

$$U_l(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i}\mu(f^{-1}(J_i))$$

όπου $\mu(f^{-1}(J_i))$ είναι το «μήκος» του υποσυνόλου[2] $f^{-1}(J_i) \subseteq [a,b]$.

Το πρόβλημα τώρα βρίσκεται στον ορισμό του «μήκους» ενός συνόλου που δεν είναι διάστημα. Το μήκος ενός διαστήματος με άκρα $s < t$ είναι βέβαια $t-s$, και επομένως η πρώτη δουλειά που έχουμε να κάνουμε είναι να *επεκτείνουμε* την έννοια του μήκους σε μια ευρύτερη κλάση συνόλων.

7 Ολοκλήρωμα Lebesgue

7.1 Συνολοσυναρτήσεις

Η κλάση των συνόλων που είναι «μετρήσιμα», δηλαδή «έχουν μήκος» είναι (όπως θα δείξουμε) κλειστή ως προς *αριθμήσιμες* ενώσεις και συμπληρώματα. Μια τέτοια κλάση συνόλων ονομάζεται σ-δακτύλιος:

Ορισμός 7.1 (Δακτύλιοι υποσυνόλων) *Αν X μη κενό σύνολο, μια οικογένεια $\mathcal{R}$ από υποσύνολα του X λέγεται* ***δακτύλιος*** *αν*

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R} \text{ και } A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Ένας δακτύλιος $\mathcal{R}$ λέγεται ***άλγεβρα*** *αν $X \in \mathcal{R}$.*

Αν $\mathcal{R}$ δακτύλιος και $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ έχουμε

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{R}$$

(επαγωγή) και

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{R}$$

διότι $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$.

[2] Δες το σχήμα `merathr.jpg` στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

Ορισμός 7.2 **(σ-δακτύλιοι)** *Αν X μη κενό σύνολο, μια οικογένεια $\mathcal{R}$ από υποσύνολα του X λέγεται σ-**δακτύλιος** αν είναι δακτύλιος και επιπλέον*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

*Μια άλγεβρα συνόλων που είναι σ-δακτύλιος λέγεται σ-**άλγεβρα**.*

Ορισμός 7.3 *Αν $\mathcal{R}$ είναι δακτύλιος, μια **συνολοσυνάρτηση** στον $\mathcal{R}$ είναι μια απεικόνιση*

$$\phi : \mathcal{R} \to [-\infty, \infty] \equiv \bar{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

που το σύνολο τιμών της (α) δεν περιέχει και τις δύο τιμές $-\infty, +\infty$ και (β) περιέχει και πραγματικές τιμές.

*Η ϕ λέγεται **προσθετική** αν*

$$A, B \in \mathcal{R} \text{ και } A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B).$$

*Η ϕ λέγεται σ-**προσθετική** ή **αριθμήσιμα προσθετική** αν*

$$A_n \in \mathcal{R} \text{ ξένα ανά δύο και } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Ας θυμηθούμε ότι η ένωση (αντίστοιχα, η τομή) μιας οικογένειας $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X ορίζεται ως εξής:

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \equiv \{x \in X : \text{υπάρχει } \gamma \in \Gamma \text{ ώστε } x \in A_\gamma\}$$
$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \equiv \{x \in X : \text{για κάθε } \gamma \in \Gamma \text{ ισχύει } x \in A_\gamma\}.$$

Παρατήρηση 7.1 *Άμεσες συνέπειες της προσθετικότητας:*

$$\phi(\emptyset) = 0$$
$$\phi(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \phi(A_k) \ \text{ αν } A_k \in \mathcal{R} \text{ ξένα ανά δύο}$$
$$\phi(A \cup B) + \phi(A \cap B) = \phi(A) + \phi(B) \quad \text{για κάθε } \ A, B \in \mathcal{R}$$
$$\text{αν } \phi(A) \geq 0 \ \text{ για κάθε } \ A \in \mathcal{R} \text{ τότε } \ \phi(A) \leq \phi(B) \text{ όταν } \ A \subseteq B,\ A, B \in \mathcal{R}.$$

Πρόταση 7.2 *Αν ϕ είναι σ-προσθετική συνολοσυνάρτηση σ'ένα δακτύλιο $\mathcal{R}$ και $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{R}$ με $\cup_n A_n \in \mathcal{R}$, τότε*

$$\lim_n \phi(A_n) = \phi(\cup_n A_n).$$

7.2 Κατασκευή του μέτρου Lebesgue

Η κατασκευή θα γίνει σε τρία στάδια:

1. Ορίζουμε πρώτα το μήκος m μιας πεπερασμένης ένωσης ξένων ανά δύο διαστημάτων: είναι το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων. Έτσι έχουμε μια προσθετική μη αρνητική συνολοσυνάρτηση ορισμένη σ'ένα δακτύλιο $\mathcal{E}$.

2. Επεκτείνουμε το m σε τυχαία υποσύνολα, προσεγγίζοντάς τα «απ'έξω» από αριθμήσιμες ενώσεις ανοικτών στοιχειωδών συνόλων. Χάνουμε όμως έτσι την προσθετικότητα του m.

3. Δείχνουμε ότι υπάρχει ένας σ-δακτύλιος συνόλων όπου η συνολοσυνάρτηση m^* (η επέκταση του m) είναι σ-προσθετική.

Επειδή η κατασκευή του μέτρου Lebesgue στον $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς η ίδια με την κατασκευή στον $\mathbb{R}^d$, ασχολούμαστε απευθείας με τον $\mathbb{R}^d$. Έτσι, το m αντιστοιχεί στο μήκος για $d = 1$, το εμβαδόν για $d = 2$ και τον όγκο για $d = 3$.

7.2.1 Πρώτο στάδιο: το m στα στοιχειώδη σύνολα

Ορισμός 7.4 *Ένα* ***διάστημα*** *στον $\mathbb{R}^d$ είναι ένα σύνολο της μορφής*

$$I = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \ldots, d\}$$

όπου οι αριθμοί $a_i \leq b_i$ είναι πραγματικοί και οι ανισότητες μπορεί να είναι γνήσιες. Ορίζουμε

$$m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ θα λέγεται ***στοιχειώδες*** *αν είναι* πεπερασμένη *ένωση διαστημάτων. Η οικογένεια των στοιχειωδών συνόλων συμβολίζεται $\mathcal{E}$. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων, $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$, ορίζουμε*

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k).$$

Ασκήσεις 7.3 ***(α)*** *Η οικογένεια $\mathcal{E}$ είναι δακτύλιος, αλλά όχι σ-δακτύλιος.*
(β) *Κάθε $A \in \mathcal{E}$ γράφεται ως πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων.*
(γ) *Αν $A \in \mathcal{E}$, η τιμή του $m(A)$ είναι καλά ορισμένη από την (7.4), δηλαδή αν*

$$A = I_1 \cup \ldots \cup I_n = J_1 \cup \ldots \cup J_k$$

όπου τα I_i και J_j είναι ξένα ανά δύο διαστήματα, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) = \sum_{j=1}^{k} m(J_j).$$

Επομένως έχει ορισθεί μια συνολοσυνάρτηση m στον δακτύλιο $\mathcal{E}$.
(δ) *Η συνολοσυνάρτηση m είναι (προφανώς μη αρνητική και) προσθετική στον $\mathcal{E}$.*

Άσκηση 7.4 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη. Αν $\mathcal{E}[a, b]$ είναι τα στοιχειώδη υποσύνολα του $[a, b]$, τι εννοούμε με τον ορισμό*

$$\phi(A) = \int_A f(t)dt$$

όταν $A \in \mathcal{E}[a, b]$; Είναι η ϕ καλά ορισμένη συνολοσυνάρτηση; Είναι σ-προσθετική;

7.2.2 Δεύτερο στάδιο: υποπροσθετική επέκταση σε αυθαίρετα σύνολα

Θα ορίσουμε τώρα μια επέκταση m^* του m σ'όλο το δυναμοσύνολο $\mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$. Η συνολοσυνάρτηση m^* θα είναι μη αρνητική και μονότονη, όχι όμως προσθετική.

Η επέκταση αυτή στηρίζεται στην τοπολογική ιδιότητα της *κανονικότητας* του m.

Ορισμός 7.5 *Έστω ϕ μια* μη αρνητική προσθετική *συνολοσυνάρτηση ορισμένη στον δακτύλιο $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Η ϕ λέγεται* ***ομαλή ή κανονική (regular)*** *αν:*

Για κάθε $A \in \mathcal{E}$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν $F, G \in \mathcal{E}$ όπου F κλειστό και G ανοικτό, με

$$F \subseteq A \subseteq G \quad \text{και} \quad \phi(G) - \epsilon \leq \phi(A) \leq \phi(F) + \epsilon.$$

Άσκηση 7.5 *Η συνολοσυνάρτηση m είναι κανονική.*

Ορισμός 7.6 (Εξωτερικό μέτρο) *Έστω μ μια ομαλή και πεπερασμένη συνολοσυνάρτηση ορισμένη στον δακτύλιο $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Αν E είναι* αυθαίρετο *υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, ορίζουμε*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \text{ ανοικτά και στοιχειώδη}\right\}.$$

*Το μ^* λέγεται **το εξωτερικό μέτρο (outer measure)** που αντιστοιχεί στο μ.*

Θεώρημα 7.6 ***(α)*** *Αν $A \in \mathcal{E}$, τότε $\mu^*(A) = \mu(A)$.*
(β) *Η μ^* είναι (μονότονη και) σ-*υποπροσθετική*, δηλαδή για κάθε ακολουθία (E_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, έχουμε*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

7.2.3 Τρίτο στάδιο: ορισμός του σ-δακτύλιου $\mathcal{M}(m)$ όπου το m^* είναι σ-προσθετικό

Ξεκινάμε με μια ομαλή συνολοσυνάρτηση μ (για παράδειγμα, με το m) ορισμένη στον δακτύλιο $\mathcal{E}$ των στοιχειωδών υποσυνόλων του $\mathcal{R}^d$. Με μια διαδικασία «πλήρωσης» του $\mathcal{E}$ ως προς μια «απόσταση» μεταξύ συνόλων που ορίζεται από το μ^*, βρίσκουμε τον δακτύλιο $\mathcal{M}_F(\mu)$ όπου το μ^* είναι σ-προσθετικό και επιπλέον πεπερασμένο: είναι τα «πεπερασμένα μετρήσιμα» (finitely measurable) σύνολα. Αν $\mu^*(\mathbb{R}^d) < \infty$ έχουμε τελειώσει. Αυτή όμως είναι μια ειδική περίπτωση: π.χ. $m^*(\mathbb{R}^d) = \infty$. Στη γενική περίπτωση, τα μετρήσιμα σύνολα προκύπτουν ως αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων από τον $\mathcal{M}_F(\mu)$.

Ορισμός 7.7 *Αν $A, B \in \mathbb{R}^d$ η **συμμετρική διαφορά** των A και B είναι το σύνολο*

$$\begin{aligned} S(A,B) \equiv A\Delta B &\equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$d(A,B) = \mu^*(A\Delta B).$$

Ορίζουμε τις οικογένειες $\mathcal{M}_F(\mu)$ και $\mathcal{M}(\mu)$ ως εξής

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{M}_F(\mu) &\iff \textit{υπάρχει ακολουθία } (A_n),\ A_n \in \mathcal{E} \textit{ ώστε } d(A_n, A) \to 0 \\ B \in \mathcal{M}(\mu) &\iff \textit{υπάρχει ακολουθία } (B_n),\ B_n \in \mathcal{M}_F(\mu) \textit{ ώστε } B = \bigcup_n B_n. \end{aligned}$$

Ο στόχος είναι να αποδείξουμε ότι

Θεώρημα 7.7 *Ο $\mathcal{M}(\mu)$ είναι σ-δακτύλιος και το μ^* είναι σ-προσθετικό στον $\mathcal{M}(\mu)$.*

Θα χρειασθούν μερικές προκαταρκτικές

Παρατηρήσεις 7.8

$$\begin{aligned} \textbf{(i)} \qquad S \triangle B &= B \triangle A, \quad A \triangle A = 0 && (2)\\ d(A,B) &= d(B,A), \quad d(A,A) = 0 && (3)\\ A \triangle B &\subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B) && (4)\\ d(A,B) &\leq d(B,C) + d(C,B) && (5) \end{aligned}$$

Απόδειξη Οι (2) και (3) είναι άμεσες από τους ορισμούς.

Η (4) προκύπτει απο τις

$$A \setminus B \subseteq (A \setminus C) \cup (C \setminus B), \quad B \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cup (B \setminus C)$$

που επαληθεύονται άμεσα[3].

Από την (4) προκύπτει η (5):

$$d(A,B) = \mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \leq \mu^*(B \triangle C) + \mu^*(C \triangle B)$$

όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει λόγω της μονοτονίας και η δεύτερη λόγω της σ-υποπροσθετικότητας του μ^*. $\square$

$$\textbf{(ii)} \qquad \left.\begin{array}{c} (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \\ (A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \\ (A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \end{array}\right\} \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \qquad (6)$$

[3] αν $x \in (A \setminus B)$ τότε ή $x \notin C$ οπότε $x \in (A \setminus C)$ ή $x \in C$ οπότε $x \in (C \setminus B)$ (αφού $x \notin B$), άρα $x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$

$$\left.\begin{array}{r} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \end{array}\right\} \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2) \tag{7}$$

Απόδειξη Αποδεικνύεται εύκολα[4] ότι
$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) &= [(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)] \cup [(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)] \\ &\subseteq [(A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)] \cup [(B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2)] \\ &= [(A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_1)] \cup [(A_2 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus A_2)] \\ &= (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2). \end{aligned} \tag{*}$$

που είναι η πρώτη από τις σχέσεις (6).

Οι άλλες δύο έπονται από αυτήν, αν παρατηρήσει κανείς ότι

$$A \triangle B = B^c \triangle A^c$$

όπου B^c το συμπλήρωμα του B (πράγματι, $(A \setminus B)^c = B \setminus A$.) Έχουμε:

$$\begin{aligned} (A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) &= (A_1 \cap A_2)^c \triangle (B_1 \cap B_2)^c = (A_1^c \cup A_2^c) \triangle (B_1^c \cup B_2^c) \\ &\overset{*}{\subseteq} (A_1^c \triangle B_1^c) \cup (A_2^c \triangle B_2^c) = (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2). \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) &= (A_1 \cap A_2^c) \triangle (B_1 \cap B_2^c) \\ &\subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2^c \triangle B_2^c) = (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \end{aligned}$$

και η απόδειξη των (6) ολοκληρώθηκε.

Οι ανισότητες (7) είναι τώρα άμεσες συνέπειες των (6), χρησιμοποιώντας όπως πριν την μονοτονία και την υποπροσθετικότητα του μ^*. $\square$

Παρατήρηση 7.9 Οι ανισότητες (3) και (5) θυμίζουν ιδιότητες μιας μετρικής. Όμως η d δεν είναι μετρική στο σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, πρώτον γιατί δεν παίρνει πάντα πεπερασμένες τιμές (π.χ. αν $\mu = m$ και $A = \mathbb{R}^d$, $B = \emptyset$ έχουμε $d(A, B) = \infty$). Αλλά ακόμη κι αν περιορισθούμε στον δακτύλιο $\mathcal{E}$ (οπότε $d(A, B) < \infty$ για κάθε $A, B \in \mathcal{E}$), μπορεί να υπάρχουν σύνολα $A \neq B$ με $d(A, B) = 0$.

[4] Αν $x \in (A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)$ τότε ή $x \in A_1$ οπότε $x \in (A_1 \setminus B_1)$ (γιατί $x \notin (B_1 \cup B_2)$) ή $x \in A_2$ οπότε $x \in (A_2 \setminus B_2)$.

Παράδειγμα 7.10 *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ αριθμήσιμο, τότε $m^*(A) = 0$, άρα $d(A, \emptyset) = 0$.*

Απόδειξη Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Αν $\varepsilon > 0$, θέτουμε
$I_n = (a_n - \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}, a_n + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n})$. Έχουμε $A \subseteq \cup_n I_n$ και $\sum_n m(I_n) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. □

Παρατήρηση 7.11 Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ και ένα τουλάχιστον από τα $\mu^*(A)$, $\mu^*(B)$ είναι πεπερασμένο, τότε

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B). \tag{8}$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ και $\mu^*(B) < \infty$. Επειδή $A \subseteq (A \triangle B) \cup B$ έχουμε

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \triangle B) + \mu^*(B) = d(A, B) + \mu^*(B)$$
$$\text{άρα } \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B) \quad (\text{ γιατί } \mu^*(B) < \infty). \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος

Βήμα 1 Το $\mathcal{M}_F(\mu)$ είναι δακτύλιος.

Απόδειξη Αν $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$, πρέπει να δείξω ότι $A \cup B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ και $A \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Από τον ορισμό του $\mathcal{M}_F(\mu)$ υπάρχουν $A_n, B_n \in \mathcal{E}$ ώστε $d(A_n, A) \to 0$, $d(B_n, B) \to 0$. Επειδή ο $\mathcal{E}$ είναι δακτύλιος, έχουμε $A_n \cup B_n \in \mathcal{E}$ και $A_n \setminus B_n \in \mathcal{E}$, οπότε από την (7) προκύπτει ότι

$$d(A_n \cup B_n, A \cup B) \to 0, \text{ άρα } A \cup B \in \mathcal{M}_F(\mu)$$
$$\text{και } d(A_n \setminus B_n, A \setminus B) \to 0, \text{ άρα } A \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu). \quad \square$$

Βήμα 2 Η μ^* είναι μη αρνητική, πεπερασμένη και προσθετική στον $\mathcal{M}_F(\mu)$.

Απόδειξη Αν $A_n \in \mathcal{E}$ (οπότε $\mu^*(A_n) = \mu(A_n) < \infty$) ώστε $d(A_n, A) \to 0$, από την (8) έχουμε

$$\mu(A_n) = \mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$$

άρα $\mu^*(A) \geq 0$. Επίσης

$$\mu^*(A) \leq d(A, A_n) + \mu^*(A_n) < \infty$$

άρα $\mu^*(A) \in \mathbb{R}$.

Τέλος, αν $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ και $A_n, B_n \in \mathcal{E}$ με $d(A_n, A) \to 0$ και $d(B_n, B) \to 0$, από την (8) έχουμε $\mu(A_n) = \mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$ και $\mu(B_n) \to \mu^*(B)$. Ομοίως, επειδή $d(A_n \cup B_n, A \cup B) \to 0$ και $d(A_n \cap B_n, A \cap B) \to 0$ (λόγω των (7)), έχουμε $\mu(A_n \cup B_n) \to \mu^*(A \cup B)$ και $\mu(A_n \cap B_n) \to \mu^*(A \cap B)$. Αλλά για κάθε n, επειδή η μ είναι προσθετική στον $\mathcal{E}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(A_n) + \mu(B_n) &= \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n) \\ \text{επομένως} \;\; \mu^*(A) + \mu^*(B) &= \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B). \end{aligned}$$

Ειδικότερα αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B)$, και η προσθετικότητα αποδείχθηκε. $\square$

Βήμα 3 Ο δακτύλιος $\mathcal{M}_F(\mu)$ αποτελείται από όλα τα μετρήσιμα σύνολα που έχουν πεπερασμένο μέτρο:

$$\mathcal{M}_F(\mu) = \{A \in \mathcal{M}(\mu) : \mu^*(A) < \infty\}.$$

Απόδειξη Αν $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ τότε $\mu^*(A) < \infty$ από το βήμα 2. Αντίστροφα, έστω $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Το A μπορεί να γραφτεί[5] ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο συνόλων που ανήκουν στον $\mathcal{M}_F(\mu)$:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ όπου } \; A_n \in \mathcal{M}_F(\mu), \text{ ξένα ανά δύο.}$$

Από την σ-υποπροσθετικότητα του μ^* έχουμε $\mu^*(A) \le \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Από την άλλη μεριά, εφόσον το μ^* είναι προσθετικό στον $M_F(\mu)$ (Βήμα 2), για κάθε n έχουμε,

$$\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \ldots + \mu^*(A_n) = \mu^*(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \le \mu^*(A)$$

(η ανισότητα έπεται από τη μονοτονία του μ^*). Επομένως $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \le \mu^*(A)$

[5] Πράγματι, έστω $A = \cup_n B_n$ όπου $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Θέτουμε $C_1 = B_1$, $C_2 = (B_1 \cup B_2)$, $\ldots, C_n = (B_1 \cup \ldots \cup B_n), \ldots$. Τότε $C_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ διότι $\mathcal{M}_F(\mu)$ δακτύλιος, $C_n \subseteq C_{n+1}$ και $\cup_{k \le n} C_k = \cup_{k \le n} B_k$ για κάθε n. Άρα το A είναι αριθμήσιμη ένωση μιας *αύξουσας* ακολουθίας συνόλων από το $\mathcal{M}_F(\mu)$. Αν τώρα θέσουμε $A_1 = C_1, \ldots, A_n = C_n \setminus C_{n-1}, \ldots$ τότε $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$, ξένα ανά δύο και $\cup_{k \le n} A_k = \cup_{k \le n} C_k = \cup_{k \le n} B_k$ για κάθε n, οπότε $A = \cup_n A_n$.

άρα τελικά έχουμε ισότητα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A).$$

Αν $\mu^*(A) < \infty$ τότε έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k = 0$.
Επομένως, αν $C_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, ισχύει ότι

$$d(A, C_n) = \mu^*(A \setminus C_n) = \mu^* \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \to 0$$

(πάλι λόγω σ-υποπροσθετικότητας του μ^*). Επειδή $C_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$, για κάθε n υπάρχει $B_n \in \mathcal{E}$ ώστε $d(B_n, C_n) < \frac{1}{n}$, οπότε $d(B_n, A) \leq d(B_n, C_n) + d(C_n, A) \to 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Βήμα 4 Το μ^* είναι σ-προσθετικό στον $\mathcal{M}(\mu)$.

Απόδειξη Έστω $D = \cup_n D_n$ όπου $D_n \in \mathcal{M}(\mu)$ είναι ξένα ανά δύο και $D \in \mathcal{M}(\mu)$. Αν $\mu^*(D_n) < +\infty$ για κάθε n, τότε $D_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ για κάθε n, οπότε η ισότητα

$$\mu^*(D) = \sum \mu^*(D_n)$$

έχει αποδειχθεί στο Βήμα 3.

Αν πάλι υπάρχει n με $\mu^*(D_n) = +\infty$, τότε επειδή $\mu^*(D) \geq \mu^*(D_n)$ έχουμε $\mu^*(D) = +\infty$ άρα πάλι έχουμε

$$\mu^*(D) = \sum \mu^*(D_n).$$

Βήμα 5 Ο $\mathcal{M}(\mu)$ είναι σ-δακτύλιος.

Απόδειξη Αν $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$, εξ ορισμού κάθε A_n γράφεται $A_n = \cup_k B_{n,k}$ όπου $B_{n,k} \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Έπεται ότι η ένωση

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =& B_{11} \cup B_{12} \cup B_{13} \cup \dots \\
& \cup B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup \dots \\
& \cup B_{31} \cup B_{32} \cup B_{33} \cup \dots \\
=& B_{11} \cup (B_{12} \cup B_{21}) \cup (B_{13} \cup B_{22} \cup B_{31}) \cup \dots \\
=& B_{11} \cup \left(\bigcup_{k=3}^{\infty} C_k \right)
\end{aligned}$$

όπου για κάθε k

$$C_k = \bigcup_{i+j=k} B_{ij} \in \mathcal{M}_F(\mu)$$

(γιατί το πλήθος των όρων της ένωσης είναι πεπερασμένο). Άρα $\cup_k C_k \in \mathcal{M}(\mu)$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\cup_n A_n \in \mathcal{M}(\mu)$.

Έστω τώρα $A = \cup_n A_n$ και $C = \cup_n C_n$ όπου $A_n, C_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Θα δείξουμε ότι $A \setminus C \in \mathcal{M}(\mu)$. Έχουμε, για κάθε n,

$$A_n \cap C = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_n \cap C_k).$$

Εφόσον κάθε $A_n \cap C_k \in \mathcal{M}_F(\mu)$, έπεται ότι $A_n \cap C \in \mathcal{M}(\mu)$. Αλλά $\mu^*(A_n \cap C) \leq \mu^*(A_n) < \infty$, άρα $A_n \cap C \in \mathcal{M}_F(\mu)$ από το Βήμα 3.

Επομένως $A_n \setminus C = A_n \setminus (A_n \cap C) \in \mathcal{M}_F(\mu)$ και άρα τελικά

$$A \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus C) \in \mathcal{M}(\mu).$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε!

Στο εξής θα συμβολίζουμε με μ τον περιορισμό του μ^* στον σ-δακτύλιο $\mathcal{M}(\mu)$: πρόκειται για την σ-προσθετική επέκταση του μ από τον δακτύλιο των στοιχειωδών συνόλων:

$$\mu \equiv \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu)}.$$

Ορισμός 7.8 *Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ είναι η επέκταση του m στον σ-δακτύλιο $\mathcal{M}(m)$ των Lebesgue-μετρήσιμων συνόλων.*

Παρατήρηση 7.12 *Κάθε ανοικτό σύνολο ανήκει στον $\mathcal{M}(\mu)$, γιατί γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων (Απόδειξη: άσκηση). Ειδικότερα $\mathbb{R}^d \in \mathcal{M}(\mu)$. Άρα ο σ-δακτύλιος $\mathcal{M}(\mu)$ είναι στην πραγματικότητα σ-άλγεβρα. Επομένως, κάθε κλειστό σύνολο ανήκει επίσης στον $\mathcal{M}(\mu)$.*

Παρατήρηση 7.13 *Αν $A \in \mathcal{M}(\mu)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο F και ανοιχτό σύνολο G ώστε $F \subseteq A \subseteq G$ και*

$$\mu(G \setminus A) < \varepsilon, \quad \mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Απόδειξη Από τον ορισμό του $\mu^*(A)$, υπάρχουν ανοιχτά στοιχειώδη σύνολα $V_n \in \mathcal{E}$ με $A \subseteq \cup_n V_n$ και

$$\mu(A) = \mu^*(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) - \varepsilon.$$

Θέτουμε $G = \cup_n V_n$: είναι ανοιχτό σύνολο. Από την υποπροσθετικότητα του μ, $\mu(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) < \mu(A) + \varepsilon$ άρα (αφού $\mu(G) = \mu(G \setminus A) + \mu(A)$) $\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) < \varepsilon$.

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο A^c: βρίσκουμε κλειστό σύνολο F με $A^c \subseteq F^c$ και $\mu(F^c \setminus A^c) < \varepsilon$, άρα $F \subseteq A$ και $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

Ορισμός 7.9 *Η σ-άλγεβρα **των συνόλων Borel** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι ο μικρότερος σ-δακτύλιος που περιέχει τα ανοικτά σύνολα.*

Η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ προκύπτει από τα ανοικτά σύνολα με αριθμήσιμες ενώσεις, τομές και συμπληρώματα. Επομένως $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ για κάθε κανονικό μέτρο ορισμένο στον $\mathcal{E}$.

Παρατήρηση 7.14 *Για κάθε $A \in \mathcal{M}(\mu)$ υπάρχουν σύνολα Borel F και G με $F \subseteq A \subseteq G$ και*

$$\mu(G \setminus A) = \mu(A \setminus F) = 0.$$

Εφόσον

$$A = (A \setminus F) \cup F$$

έπεται ότι κάθε $A \in \mathcal{M}(\mu)$ είναι ένωση ενός συνόλου Borel και ενός μηδενικού συνόλου. Μολονότι τα σύνολα Borel είναι μετρήσιμα ως προς όλα τα κανονικά μέτρα (που είναι ορισμένα στον $\mathcal{E}$) τα μηδενικά σύνολα του $\mathcal{M}(\mu)$ εξαρτώνται εν γένει από το μ.

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ένα κλειστό F_n και ένα ανοικτό G_n με $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ και $\mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$, $\mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Θέτουμε $G = \cap G_n$ και $F = \cup F_n$. Είναι σύνολα Borel και ισχύει $F \subseteq A \subseteq G$ και $\mu(G \setminus A) \leq \mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$, $\mu(A \setminus F) \leq \mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $\mu(G \setminus A) = 0$ και $\mu(A \setminus F) = 0$.

Παρατήρηση 7.15 *Τα μηδενικά σύνολα του $\mathcal{M}(\mu)$ αποτελούν σ-δακτύλιο (και όχι σ-άλγεβρα, εκτός αν $\mu = 0$).*

Ειδικά στην περίπτωση του μέτρου Lebesgue, κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι μηδενικό (όπως αποδείξαμε). Υπάρχουν όμως και υπεραριθμήσιμα μηδενικά σύνολα, όπως για παράδειγμα το σύνολο Cantor.

Άσκηση 7.16 *Αν m είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι κάθε επίπεδο και κάθε ευθεία έχει μέτρο μηδέν.*