Σειρές Fourier φραγμένων συναρτήσεων

Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $0 \le r < 1$, η σειρά

$$f_r(t) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση $f_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (παρόλο που για $r = 1$ η σειρά, δηλαδή η σειρά Fourier της f, μπορεί να μην συγκλίνει ούτε κατά σημείο). Πράγματι η (διπλή) ακολουθία $(\hat{f}(k))$ είναι μηδενική από το Λήμμα Riemann - Lebesgue άρα υπάρχει $M < \infty$ με $|\hat{f}(k)| \le M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt} \right| \le M \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} < \infty.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_r(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \hat{f}(k) e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) e^{int} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-in(t-s)} ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{-in(t-s)} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(t-s) ds
\end{aligned}$$

λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, όπου

$$\begin{aligned}
P_r(t) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n} e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt
\end{aligned}$$

ο πυρήνας του Poisson. Αν γράψουμε $z = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P_r(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + 1 + \frac{z}{1-z} \\
&= \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{1}{1-z} = \frac{\bar{z}(1-z) + (1-\bar{z})}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}
\end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι $P_r(t) \geq 0$ για κάθε t. Επίσης

$$\widehat{P_r}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)e^{-ikt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt = r^{|k|}$$

για κάθε $r \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{Z}$, εφόσον η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα. Ειδικότερα,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = r^0 = 1.$$

Αν λοιπόν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα και φραγμένη, θα έχουμε

$$|f_r(t)| \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t-s)|ds = \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = \|f\|_\infty$$

(αφού η P_r είναι 2π-περιοδική και μη αρνητική) για κάθε t και r.

Ερώτημα *Ξέρουμε ότι οι συντελεστές Fourier μιάς Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης αποτελούν τετραγωνικά αθροίσιμη ακολουθία (ανισότητα Bessel). Το ερώτημα είναι αν ισχύει το αντίστροφο: Αν $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$, μπορώ άραγε να βρώ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ώστε $\widehat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$;*

Η απάντηση είναι εν γένει αρνητική:

Παράδειγμα 1 *Η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n}$$

(μολονότι συγκλίνει για κάθε $t \neq 2k\pi$, όπως έχουμε αποδείξει) δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι είναι η σειρά Fourier μιάς Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης f. Θα έχουμε τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$f_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{int}}{n} \quad \Longrightarrow \quad f_r(0) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{n}$$

$$\text{άρα} \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{n} = |f_r(0)| \leq \|f\|_\infty \qquad \text{για κάθε } 0 \leq r < 1.$$

Αυτό όμως αποκλείεται εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.
(Πράγματι, αν είχαμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $r < 1$, τότε για κάθε $r < 1$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ θα είχαμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{r^n}{n} \leq \|f\|_\infty$, άρα $\displaystyle\sup_{0 \leq r < 1} \sum_{n=1}^{m} \frac{r^n}{n} \leq \|f\|_\infty$, δηλαδή $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άτοπο.)

Σημείωση Θα δείξουμε αργότερα ότι υπάρχει μια συνάρτηση f που είναι τετραγωνικά απολύτως ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue, που η σειρά Fourier της είναι η παραπάνω.