Ασκήσεις I: σειρές Fourier
2 Μαΐου 2004

Άσκηση 1 Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$(\sin(nx))_n \qquad \text{και} \qquad (\cos(nx))_n$$

για τις διάφορες τιμές του x.

Άσκηση 2 Αν η συνάρτηση f είναι 2π-περιοδική λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0$$

με σταθερούς συντελεστές $a, b, c \in \mathbb{R}$ όπου $b \neq 0$, να βρεθούν οι συντελεστές Fourier της f.

Μπορείτε τώρα να βρείτε μια λύση της εξίσωσης

$$ay' + by' + cy = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

όπου $c_k \in \mathbb{C}$ σταθερές;

Άσκηση 3 Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 4 Να εξετασθεί αν συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά[1]

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

και να βρεθεί το όριό της, αν υπάρχει.

Άσκηση 5 Δίδονται οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_1 :& (-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_1(t) = t, \quad f_2 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \text{ με } f_2(t) = t, \\ f_3 :& [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_3(t) = t^2 - \pi^2. \end{aligned}$$

Να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν οι σειρές Fourier τους. Να εξετασθεί αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν και πού. Εφαρμόζονται οι Προτάσεις της Παραγράφου 3 στις συναρτήσεις αυτές;

Άσκηση 6 Εφαρμόζοντας την ισότητα Parseval για τη συνάρτηση f_2 της προηγούμενης Άσκησης, να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Άσκηση 7 Αν είναι γνωστή η σειρά Fourier μιας συνάρτησης g, να βρεθούν οι σειρές Fourier των συναρτήσεων $g_1(t) = g(t) - a$, $g_2(t) = g(t - b)$, $g_3(t) = g(ct)$, $g_4(t) = e^{idt} g(t)$, όπου a, b, c, d κατάλληλες σταθερές.

Άσκηση 8 Αν f είναι 2π-περιοδική και Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση, είναι αλήθεια ότι

$$\lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(f, t)|^2 dt = 0 \quad ;$$

[1] βλ. τις γραφικές παραστάσεις στην ηλεκτρονική σελίδα του μαθήματος