Πραγματική Ανάλυση II (605)

Εξετάσεις 16 Ιουνίου 2004

1. Αν είναι γνωστή η σειρά Fourier μιας 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ να βρεθεί η σειρά Fourier των συναρτήσεων g, h με $g(t) = f(t - a)$ και $h(t) = f(t) - b$ ($t \in \mathbb{R}$).

2. Αν $f(t) = |t|$, $t \in [-\pi, \pi]$, να υπολογισθεί η σειρά Fourier της f και να εξετασθεί αν συγκλίνει στην f σε κάθε σημείο του $[-\pi, \pi]$.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν οι f, f' και f'' είναι 2π-περιοδικές και συνεχείς, αποδείξτε πλήρως ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[-\pi, \pi]$.

4. Έστω $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, όπου f άρτια και g περιττή. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι σειρά συνημιτόνων, και η σειρά Fourier της g είναι σειρά ημιτόνων.
Δείξτε επίσης ότι $\int_{-\pi}^{\pi} fg = 0$.

5. (α) Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $f(t) = \cos^2 t$.
(β) Αν $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις κλάσεως $\mathcal{L}^2$ με τους ίδιους συντελεστές Fourier , πώς σχετίζονται οι f και g; Τι συμβαίνει αν είναι και οι δύο συνεχείς;

6. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim_n f_n(t)$ υπάρχει. Διατυπώστε δύο συνθήκες για την ακολουθία (f_n) κάθε μια από τις οποίες εξασφαλίζει ότι

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dm = \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n dm.$$

(β) Αν $f(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, δείξτε ότι η f είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^+$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της.

7. Εξετάστε αν ορίζονται τα ολοκληρώματα Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} \sin t \, dm(t), \qquad \int_{\mathbb{R}} |\sin t| \, dm(t)$$

(όπου m το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$) και, αν κάποιο ορίζεται, υπολογίστε το.

Να γραφούν πέντε θέματα.
Καλή επιτυχία!