Παρατήρηση 7.12 *Κάθε ανοικτό σύνολο ανήκει στον $\mathcal{M}(\mu)$, γιατί γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων (Απόδειξη: άσκηση). Ειδικότερα $\mathbb{R}^d \in \mathcal{M}(\mu)$. Άρα ο σ-δακτύλιος $\mathcal{M}(\mu)$ είναι στην πραγματικότητα σ-άλγεβρα. Επομένως, κάθε κλειστό σύνολο ανήκει επίσης στον $\mathcal{M}(\mu)$.*

Παρατήρηση 7.13 *Αν $A \in \mathcal{M}(\mu)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο F και ανοιχτό σύνολο G ώστε $F \subseteq A \subseteq G$ και*

$$\mu(G \setminus A) < \varepsilon, \quad \mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Απόδειξη Από τον ορισμό του $\mu^*(A)$, υπάρχουν ανοιχτά στοιχειώδη σύνολα $V_n \in \mathcal{E}$ με $A \subseteq \cup_n V_n$ και

$$\mu(A) = \mu^*(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) - \varepsilon.$$

Θέτουμε $G = \cup_n V_n$: είναι ανοιχτό σύνολο. Από την υποπροσθετικότητα του μ, $\mu(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) < \mu(A) + \varepsilon$ άρα (αφού $\mu(G) = \mu(G \setminus A) + \mu(A)$) $\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) < \varepsilon$.

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο A^c: βρίσκουμε κλειστό σύνολο F με $A^c \subseteq F^c$ και $\mu(F^c \setminus A^c) < \varepsilon$, άρα $F \subseteq A$ και $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

Ορισμός 7.9 *Η σ-άλγεβρα* ***των συνόλων Borel*** *$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι ο μικρότερος σ-δακτύλιος που περιέχει τα ανοικτά σύνολα.*

Η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ προκύπτει από τα ανοικτά σύνολα με αριθμήσιμες ενώσεις, τομές και συμπληρώματα. Επομένως $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ για κάθε κανονικό μέτρο ορισμένο στον $\mathcal{E}$.

Παρατήρηση 7.14 *Για κάθε $A \in \mathcal{M}(\mu)$ υπάρχουν σύνολα Borel F και G με $F \subseteq A \subseteq G$ και*

$$\mu(G \setminus A) = \mu(A \setminus F) = 0.$$

Εφόσον

$$A = (A \setminus F) \cup F$$

έπεται ότι κάθε $A \in \mathcal{M}(\mu)$ είναι ένωση ενός συνόλου Borel και ενός μηδενικού συνόλου. Μολονότι τα σύνολα Borel είναι μετρήσιμα ως προς όλα τα κανονικά μέτρα (που είναι ορισμένα στον $\mathcal{E}$) τα μηδενικά σύνολα του $\mathcal{M}(\mu)$ εξαρτώνται εν γένει από το μ.

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ένα κλειστό F_n και ένα ανοικτό G_n με $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ και $\mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$, $\mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Θέτουμε $G = \cap G_n$ και $F = \cup F_n$. Είναι σύνολα Borel και ισχύει $F \subseteq A \subseteq G$ και $\mu(G \setminus A) \leq \mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$, $\mu(A \setminus F) \leq \mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $\mu(G \setminus A) = 0$ και $\mu(A \setminus F) = 0$.

Παρατήρηση 7.15 *Τα μηδενικά σύνολα του $\mathcal{M}(\mu)$ αποτελούν σ-δακτύλιο (και όχι σ-άλγεβρα, εκτός αν $\mu = 0$).*

Ειδικά στην περίπτωση του μέτρου Lebesgue, κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι μηδενικό (όπως αποδείξαμε). Υπάρχουν όμως και υπεραριθμήσιμα μηδενικά σύνολα, όπως για παράδειγμα το σύνολο Cantor.

Άσκηση 7.16 *Αν m είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι κάθε επίπεδο και κάθε ευθεία έχει μέτρο μηδέν.*