1 Τριγωνομετρικές Σειρές

Τριγωνομετρική Σειρά:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Τριγωνομετρικό πολυώνυμο:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

$a_k = b_k = 0$ όταν $k > N$. Βαθμός N αν $|a_N| + |b_N| \neq 0$.

Ισοδύναμη μορφή

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx)$$

όπου

$$\exp(it) \equiv \cos t + i \sin t$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & k \geq 1 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & k \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.1 *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \tag{1}$$

$$c_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}\,.$$

Όταν $x = 2k\pi$,

$$s_n(x) = 0$$
$$c_n(x) = n + \frac{1}{2}\,.$$

Σύγκλιση: Έστω $x \in [-\pi, \pi]$ σταθερό. Αν $x = 0, \pm\pi$ η ακολουθία $(s_n(x))_n$ είναι σταθερά ίση με 0 ενώ η $(c_n(x))_n$ τείνει στο $+\infty$ όταν $x = 0$ και είναι $\frac{(-1)^n}{2}$ όταν $x = \pm\pi$.

Για κάθε άλλη τιμή του x και οι δυο ακολουθίες αποκλίνουν.

Πράγματι αν η $(s_n(x))_n$ συγκλίνει, τότε πρέπει $\lim_n \sin nx = 0$. Τότε όμως, εφόσον $x \neq 0, \pm\pi$,

$$\begin{aligned}
&\sin(n+1)x \to 0 \\
&\Rightarrow \sin nx \cos x + \cos nx \sin x \to 0 \\
&\overset{\sin x \neq 0}{\Longrightarrow} \qquad \cos nx \to 0
\end{aligned}$$

άτοπο, αφού $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 0$.

Ομοίως αν η $(c_n(x))_n$ συγκλίνει, τότε πρέπει $\lim_n \cos nx = 0$, οπότε $\cos 2nx \to 0$, δηλαδή $2\cos^2 nx - 1 \to 0$, οπότε $\cos nx \to \frac{1}{\sqrt{2}}$, άτοπο.

Μολονότι οι δύο ακολουθίες δεν συγκλίνουν, είναι φραγμένες (όταν $x \neq 2k\pi$).

Παρατήρηση 1.2 *Αν $x \in (0, 2\pi)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| &\leq \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \qquad (2) \\
\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| &\leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $\delta > 0$ οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες *στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$: Αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| &\leq \frac{1}{2\sin \frac{\delta}{2}} \qquad (3) \\
\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| &\leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.
\end{aligned}$$

Οι ανισότητες (2) προκύπτουν άμεσα από τις (1) και οι (3) από τις (2), εφόσον $|\sin \frac{x}{2}| \geq \sin \frac{\delta}{2}$ όταν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Παρατήρηση 1.3 *Οι δύο ακολουθίες δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Δεν υπάρχει δηλαδή αριθμός $M < +\infty$ ώστε $|c_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in (0, 2\pi)$.*

Πράγματι, αν π.χ. θέσουμε $x_m = \frac{\pi}{2m+1}$ έχουμε από την (1)

$$c_m(x_m) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{1}{4m+2}} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{4m+2}}$$

που τείνει στο ∞ καθώς $m \to \infty$.

Παράδειγμα 1.4

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx = \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n^2}\sin nx$$
$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \cos kx = \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2}\cos nx$$

Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \geq m$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx\right| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

επειδή $|\sin(kx)| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αλλά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq m \geq n_o$ να ισχύει $\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} < \epsilon$ οπότε

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } n \geq m \geq n_o, \qquad \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx\right| < \epsilon$$

πράγμα που σημαίνει η ακολουθία των συναρτήσεων (s_n) (είναι βασική, άρα) συγκλίνει *ομοιόμορφα ως προς* x και συνεπώς το όριό της, έστω s, είναι συνεχής συνάρτηση.

Ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για την ακολουθία (c_n).

Χρησιμοποιήσαμε εδώ το γνωστό (δες [Ru, 7.8, 7.12] ή [Απ, 27.11, 27.12])

Θεώρημα 1.5 *Αν μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ (όπου $X \subseteq \mathbb{R}$) είναι* ομοιόμορφα βασική[1]*, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.*

Αν επί πλέον οι f_n είναι συνεχείς στο X, τότε και το όριό τους είναι συνεχής συνάρτηση.

[1] δηλαδή ικανοποιεί: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq n_o$ να ισχύει για κάθε $x \in X$ η ανισότητα $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

Παράδειγμα 1.6

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\ldots+\frac{1}{n}\sin nx$$
$$c_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos kx=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\ldots+\frac{1}{n}\cos nx$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν για κάθε $x\neq 2k\pi$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις. Αρκεί να περιορισθούμε στο $(0,2\pi)$, εφόσον οι δύο ακολουθίες είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, άρα 2π-περιοδικές συναρτήσεις.

Υπενθυμίζουμε:

Λήμμα 1.7 (άθροιση κατά μέρη, [Ru 3.41]) *Αν $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n\geq 0$ και $a_k\in\mathbb{C}$, τότε θέτοντας $s_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$ και $s_0=0$, έχουμε για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$ με $n\geq m$,*

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=\sum_{k=m}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})+s_nb_n-s_{m-1}b_m$$

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}a_kb_k&=\sum_{k=m}^{n}(s_k-s_{k-1})b_k=\sum_{k=m}^{n}s_kb_k-\sum_{k=m}^{n}s_{k-1}b_k\\&\overset{(j=k-1)}{=}\sum_{k=m}^{n}s_kb_k-\sum_{j=m-1}^{n-1}s_jb_{j+1}\\&=\sum_{k=m}^{n-1}s_kb_k+s_nb_n-s_{m-1}b_m-\sum_{j=m}^{n-1}s_jb_{j+1}\\&\overset{(k=j)}{=}\sum_{k=m}^{n-1}s_kb_k+s_nb_n-s_{m-1}b_m-\sum_{k=m}^{n-1}s_kb_{k+1}\\&=\sum_{k=m}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})+s_nb_n-s_{m-1}b_m.\end{aligned}$$

Λήμμα 1.8 (Dirichlet, [Απ 27.32])
Αν $\quad (i)\, b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0, \quad (ii)\, b_n \to 0,$
και (a_k) *ακολουθία συναρτήσεων* $a_k : X \to \mathbb{C}$ *ώστε τα μερικά αθροίσματα της σειράς* $\sum a_k$ *να είναι ομοιόμορφα φραγμένα, να υπάρχει δηλαδή* $M < \infty$ *με*

$$(iii) \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \right| \leq M \text{ για κάθε } t \in X \text{ και κάθε } n \in \mathbb{N},$$

τότε η σειρά $\sum_k b_k a_k$ *συγκλίνει* ομοιόμορφα.

Απόδειξη Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n > m$, για κάθε $t \in X$ έχουμε από το Λήμμα

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(t) b_k \right| &= \left| \sum_{k=m}^{n-1} s_k(t)(b_k - b_{k+1}) + s_n(t) b_n - s_{m-1}(t) b_m \right| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k(t)|(b_k - b_{k+1}) + |s_n(t)| b_n + |s_{m-1}(t)| b_m \ \ (\text{γιατί } b_k - b_{k+1} \geq 0) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} M(b_k - b_{k+1}) + M b_n + M b_m \\
&= M(b_m - b_n) + M b_n + M b_m = 2 M b_m.
\end{aligned}$$

Επομένως, αν δοθεί $\epsilon > 0$, αφού $b_n \to 0$, βρίσκουμε $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $b_m < \frac{\epsilon}{2M}$ όταν $m \geq n_o$, οπότε, για κάθε $t \in X$ και κάθε $n > m \geq n_o$ έχουμε από την προηγούμενη ανισότητα

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(t) b_k \right| < \epsilon$$

και άρα η σειρά είναι ομοιόμορφα βασική και συνεπώς (Θεώρημα 1.5) ομοιόμορφα συγκλίνουσα. $\square$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία (s_n) όπου

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx.$$

Εδώ έχουμε $a_k(x) = \sin kx$ και $b_k = \frac{1}{k}$. Η (b_k) φθίνει προς το 0, αλλά τα μερικά αθροίσματα δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $(0, 2\pi)$ (Παρατήρηση 1.3). Άρα το Λήμμα του Dirichlet δεν εφαρμόζεται απευθείας, γι'αυτό ακολουθούμε την εξής μέθοδο: Αν δοθεί οποιοδήποτε $x_o \in (0, 2\pi)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_o \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Ξέρουμε ότι για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ισχύει

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Επομένως το Λήμμα του Dirichlet εφαρμόζεται στο σύνολο $X_\delta = [\delta, 2\pi - \delta]$ και επομένως η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στο X_δ, έστω στη συνάρτηση f. Επειδή τα μερικά αθροίσματα είναι συνεχείς συναρτήσεις, έπεται ότι και η f θα είναι συνεχής στο ίδιο διάστημα. Έπεται λοιπόν ότι η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής στο x_o. Επειδή το x_o είναι αυθαίρετο σημείο του $(0, 2\pi)$, δείξαμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 2\pi)$.

Ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν για τις σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ikx}.$$

2 Σειρές Fourier

Αν f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, πώς να βρώ τους συντελεστές;

Παρατήρηση 2.1 *Αν*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

τότε

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n =& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_m =& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned}$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε την εύκολη

Παρατήρηση 2.2 *Αν* $n, m \in \mathbb{N}$, *έχουμε*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 1 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 1 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

Έχουμε λοιπόν, αν $1 \leq n, m \leq N$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx dx + \sum_{k=1}^{N} b_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx dx = a_0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = a_n$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx =$$

$$\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin mx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx \sin mx dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = b_m$$

Παρατήρηση 2.3 (Μιγαδική μορφή) *Αν* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx) dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Απόδειξη:

$$\text{Αν } k \neq 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx) dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\exp(ikx)}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Παρατήρηση 2.4 *Αν*

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp ikx$$

τότε, αν $-N \leq m \leq N$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-imx)dx = \sum_{k=-N}^{N}\frac{c_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp ikx\exp(-imx)dx$$
$$= \sum_{k=-N}^{N}\frac{c_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp i(k-m)xdx = c_m.$$

Γενίκευση: Αν δοθεί συνάρτηση f, ορίζω

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$b_m = b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mxdx, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)dx, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

αρκεί τα ολοκληρώματα να υπάρχουν.

Με αυτούς τους συντελεστές σχηματίζω τη **σειρά Fourier** $S(f)$ της f:

$$S(f,x) \equiv \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$
$$S_c(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

Δεν εξετάζουμε αυτή τη στιγμή πότε η σειρά Fourier $S(f)$ μιας συνάρτησης συγκλίνει και πού. Απλώς αντιστοιχούμε στην f τη σειρά $S(f)$, δηλαδή τις ακολουθίες $(a_n), (b_n)$ των συντελεστών.

Γράφουμε

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \qquad \text{ή} \quad f \sim (a_n, b_n)$$
$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \qquad \text{ή} \quad f \sim (\hat{f}_k)$$

Παράδειγμα Έστω $0 < r < 1$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kx.$$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα η f είναι συνεχής συνάρτηση. Ισχυρισμός:

$$b_n(f) = r^n \quad n = 1, 2, \dots, \quad a_n(f) = 0$$
$$\text{δηλαδή} \quad S(f) = f$$

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν

$$s_N(x) = \sum_{k=1}^{N} r^k \sin kx$$

τότε για κάθε $N \geq n$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_N(x) \sin nx dx = r^n, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_N(x) \cos nx dx = 0.$$

Αλλά (ομοιόμορφη σύγκλιση) αν $\epsilon > 0$ υπάρχει $N_o \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{για κάθε } x \in [0, 2\pi], \quad |s_{N_o}(x) - f(x)| < \epsilon$$

οπότε, διαλέγοντας $N \in \mathbb{N}$ μεγαλύτερο από το n και από το N_o, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx - r^n\right| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_N(x) \sin nx dx\right| \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - s_N(x)||\sin nx| dx \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon dx = 2\epsilon\end{aligned}$$

άρα $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = r^n$. Ομοίως $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0$.

Το παράδειγμα είναι ειδική περίπτωση της ακόλουθης Πρότασης, που αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο:

Πρόταση 2.5 *Αν $\sum |c_k| < \infty$ τότε η σειρά $\sum_k c_k \exp(ikx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή και 2π-περιοδική συνάρτηση g με $\hat{g}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

Παρατήρηση 2.6 *Γενικότερα αν μια τριγωνομετρική σειρά $f(x) = \sum_k c_k \exp(ikx)$ συγκλίνει* ομοιόμορφα, *τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι οι c_k.*

Δεν είναι όμως αλήθεια εν γένει ότι κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης (βλ. π.χ. [Απ 30.21]).

Πρόταση 2.7 (Γραμμικότητα) *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned} S(f + \lambda g) =& S(f) + \lambda S(g) \\ \textit{ισοδύναμα} \quad \widehat{f + \lambda g} =& \hat{f} + \lambda \hat{g}. \end{aligned}$$

Απόδειξη Έπεται άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

Πρόταση 2.8 *Αν f συνεχής, 2π-περιοδική με ολοκληρώσιμη παράγωγο,*

$$S(f') = \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos kx - ka_k \sin kx).$$

Μιγαδική μορφή:

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Απόδειξη Αποδεικνύουμε τη μιγαδική μορφή: Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{ikx} \right]_0^{2\pi} - \frac{-ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx = ik\hat{f}(k) \end{aligned}$$

διότι $\left[f(x) e^{ikx} \right]_0^{2\pi} = f(2\pi) e^{2\pi i} - f(0) e^0 = 0$, αφού η f είναι 2π-περιοδική.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$a_k(f') = kb_k(f), \qquad b_k(f') = -ka_k(f), \quad k = 0, 1, \dots$$

Άσκηση 2.9 *Αν η συνάρτηση f είναι 2π-περιοδική λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

με σταθερούς συντελεστές $a, b, c \in \mathbb{R}$ όπου $b \neq 0$, να βρεθούν οι συντελεστές Fourier της f.

Μπορείτε τώρα να βρείτε μια λύση της εξίσωσης

$$ay' + by' + cy = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

όπου $c_k \in \mathbb{C}$ σταθερές;

Άσκηση 2.10 *Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

Παρατηρήσεις 2.11 (Περιοδικότητα) *(i)* Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα, και γενικότερα οι συγκλίνουσες τριγωνομετρικές σειρές, είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε σειρές Fourier 2π-περιοδικών συναρτήσεων. Αν μια συνάρτηση f μας δοθεί ορισμένη στο $[0, 2\pi]$ ή στο $[-\pi, \pi]$, και ικανοποιεί $f(0) = f(2\pi)$ (αντίστοιχα $f(-\pi) = f(\pi)$) την επεκτείνουμε περιοδικά σ'όλο το $\mathbb{R}$. Αν όμως $f(0) \neq f(2\pi)$, πριν την επεκτείνουμε πρέπει να την αλλάξουμε ώστε να μπορεί να επεκταθεί περιοδικά. Διαλέγουμε λοιπόν μια τιμή c και ορίζουμε μια νέα συνάρτηση g στο $[0, 2\pi]$ θέτοντας $g(t) = f(t)$ για κάθε $t \in (0, 2\pi)$ και $g(0) = c = g(2\pi)$. Βεβαίως οι συντελεστές Fourier της g θα είναι οι ίδιοι με τους συντελεστές Fourier της f.

(ii) Όταν λέμε ότι μια 2π-περιοδική συνάρτηση f είναι π.χ. συνεχής ή συνεχώς παραγωγίσιμη, ακόμα κι'αν έχει δοθεί αρχικά στο $(0, 2\pi)$, εννοούμε ότι έχει αυτήν την ιδιότητα *αφού επεκταθεί περιοδικά* σ'ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(t) = t$, $(t \in (0, 2\pi))$ δεν έχει συνεχή περιοδική επέκταση στο $\mathbb{R}$, διότι η περιοδική επέκτασή της παρουσιάζει ασυνέχειες στα σημεία $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Η συνάρτηση $g(t) = t^2 - \pi^2$, $(t \in [-\pi, \pi])$, που είναι συνεχής 2π-περιοδική, δεν έχει συνεχή 2π-περιοδική παράγωγο (παρότι η f' είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$).

(iii) Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι περιοδική με περίοδο $\omega > 0$, τότε η σειρά Fourier της ορίζεται ως εξής:

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{\omega}x\right)$$

όπου

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{\omega}x\right)dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_m = b_m(f) = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{2m\pi}{\omega}x\right)dx, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

3 Απλές περιπτώσεις σύγκλισης

Πρόταση 3.1 *Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum|\hat{f}(k)| < \infty$ (ισοδύναμα $\sum(|a_k(f) + |b_k(f)| < \infty$) τότε $S_N(f) \to f$ ομοιόμορφα.*

Από την Πρόταση 2.5 ξέρουμε ότι η ακολουθία $(S_N(f))$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση g με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Πώς όμως θα συμπεράνουμε ότι $f = g$;

Το γεγονός αυτό έπεται από το ακόλουθο βασικό Θεώρημα, που θα αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο:

Θεώρημα 3.2 (Θεώρημα Μοναδικότητας) *Αν f και g είναι* συνεχείς *και 2π-περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f) = a_n(g)$ και $b_n(f) = b_n(g)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$), τότε $f = g$.*

Ας σημειώσουμε από τώρα ότι το Θεώρημα δεν αληθεύει ως έχει χωρίς την υπόθεση της συνέχειας. Για παράδειγμα αν η f είναι διαφορετική απο το 0 μόνο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[0, 2\pi]$, τότε $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Για την επόμενη Πρόταση θα μας χρειασθεί ένα αποτέλεσμα, γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση ([Ru 7.17], [Απ 27.29, 27.30]). Το διατυπώνουμε στην ειδική περίπτωση που θα το χρειασθούμε:

Πρόταση 3.3 *Αν $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g.*

Απόδειξη Λόγω της *ομοιόμορφης* σύγκλισης $f_n' \to g$, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Επειδή $f_n(x) \to f(x)$ και $f_n(a) \to f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά η g είναι συνεχής συνάρτηση, ως *ομοιόμορφο* όριο συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο την g. Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. $\square$

Πρόταση 3.4 *Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$ τότε η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η σειρά $\sum ik\hat{f}(k)\exp ikx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2\pi]$ στην f'.*

Απόδειξη Θέτουμε $f_N = S_N(f)$. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι $\sum |\hat{f}(k)| \leq \sum |k\hat{f}(k)| < \infty$. Συνεπώς από την Πρόταση 3.1 η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δηλαδή $f_N \to f$ ομοιόμορφα:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\exp ikx.$$

Όμως έχουμε

$$f_N'(x) = \frac{d}{dx}S_N(f, x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikx}\right) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)ike^{ikx}$$

Αλλά από την υπόθεση $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$ συμπεραίνουμε (Πρόταση 2.5) ότι η η ακολουθία (f_N') συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση g, δηλαδή

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\hat{f}(k)\exp ikx.$$

Έπεται λοιπόν από την Πρόταση 3.3 ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο την συνεχή συνάρτηση g.

Λήμμα 3.5 *Αν η f και οι παράγωγοί της $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις και αν $|f^{(n)}(t)| \leq M$ για κάθε t τότε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^n}$ για κάθε $k \neq 0$.*

Απόδειξη Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.8 για τις 2π-περιοδικές και συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ έχουμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k),\ \widehat{f''}(k) = ik\widehat{f'}(k) = (ik)^2\hat{f}(k),\ \ldots\ \widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n\hat{f}(k).$$

Αλλά

$$|\widehat{f^{(n)}}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(n)}(x)\exp(ikx)dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(n)}(x)\exp(ikx)\right|dx \leq M$$

και συνεπώς

$$|\hat{f}(k)| = \left|\frac{\widehat{f^{(n)}}(k)}{(ik)^n}\right| \leq \frac{M}{|k|^n}$$

όταν $k \neq 0$. $\square$

Πρόταση 3.6 *Αν οι f, f' και f'' είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές, η σειρά $S(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Απόδειξη Επειδή οι f, f' και f'' είναι εξ υποθέσεως συνεχείς στο $[0, 2\pi]$, είναι φραγμένες. Αν M είναι ένας αριθμός ώστε $|f''(t)| \leq M$ για κάθε t, από το Λήμμα έπεται ότι $|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^2}$ για κάθε $k \neq 0$, και συνεπώς $\sum|\hat{f}(k)| < \infty$.

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από την Πρόταση 3.1. $\square$

Άσκηση 3.7 *Να εξετασθεί αν συγκλίνει η τριγωνομετρική σειρά*[2]

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

και να βρεθεί το όριό της, αν υπάρχει.

Άσκηση 3.8 *Δίδονται οι συναρτήσεις*

$$\begin{aligned} f_1 :&[-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_1(t) = t, \quad f_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_2(t) = t, \\ f_3 :&[-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \text{ με } f_3(t) = t^2 - \pi^2 \end{aligned}$$

(βλ. Παρατήρηση 2.11). Να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν οι σειρές Fourier τους. Να εξετασθεί αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν και πού. Εφαρμόζονται οι Προτάσεις που μόλις δείξαμε στις συναρτήσεις αυτές;

[2] βλ. τις γραφικές παραστάσεις στην ηλεκτρονική σελίδα του μαθήματος