Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue
29 Οκτωβρίου 2011

1. Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που στο $[0,\pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

4. Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά δεν είναι η σειρά Fourier κάποιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

5. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \mu^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\mu^*(E\cap I) > \alpha\,\ell(I).$$

6. (α) Δείξτε ότι αν η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue δείξτε ότι υπάρχουν συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε η $h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f < \varepsilon$.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

Καλή Επιτυχία!