Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση
Μέρος Β

Δημήτριος Μπετσάκος
Τμήμα Μαθηματικών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Θεσσαλονίκη 2009

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Αυτό είναι το δεύτερο μέρος της Εισαγωγής στην Πραγματική Ανάλυση. Περιέχει τη θεωρία τού μέτρου και τού ολοκληρώματος Lebesgue στην πραγματική ευθεία, τη βασική θεωρία των χώρων L^p και λίγα στοιχεία από την αφηρημένη θεωρία μέτρου. Το βιβλίο απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές τού τρίτου ή τέταρτου έτους. Ίσως πρέπει κάποτε να συμπληρωθεί με δύο ακόμη κεφάλαια. Ένα για τη θεωρία τού μέτρου Lebesgue σε ευκλείδειους χώρους ανώτερης διάστασης και ένα για τις σειρές Fourier ως εφαρμογή της θεωρίας Lebesgue.

Κεφάλαιο 1

Το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$

1.1 Το πρόβλημα τού μέτρου

Αν a, b είναι δύο πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, θα συμβολίζουμε με $< a, b >$ κάθε διάστημα (κλειστό, ανοικτό, ή ημιανοικτό) με άκρα a, b. Το **μήκος** τού διαστήματος $I =< a, b >$ είναι ο θετικός αριθμός $\ell(I) = b - a$. Αν I είναι ένα μη φραγμένο διάστημα, το μήκος του είναι $\ell(I) = \infty$. Επίσης θέτουμε $\ell(\varnothing) = 0$. Έτσι ορίζεται μιά συνάρτηση ℓ με πεδίο ορισμού το σύνολο τών διαστημάτων και πεδίο τιμών το $[0, +\infty]$. Τέτοιου είδους συναρτήσεις (με πεδίο ορισμού ένα σύνολο υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$) ονομάζονται **συνολοσυναρτήσεις**.

Θα θέλαμε να επεκτείνουμε τη συνάρτηση ℓ σε όλα τα υποσύνολα τού $\mathbb{R}$. Ψάχνουμε λοιπόν μιά συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ τέτοια ώστε $\mu(I) = \ell(I)$ για κάθε διάστημα I. Φυσικά υπάρχουν πολλές τέτοιες επεκτάσεις· θέλουμε όμως η μ να έχει επιπλέον κατάλληλες ιδιότητες έτσι ώστε να την ονομάσουμε *μέτρο*. Προκειμένου να βρούμε ποιές είναι αυτές οι κατάλληλες ιδιότητες μελετούμε λίγο περισσότερο το μήκος διστήματος.

Μερικές προφανείς ιδιότητες της συνολοσυνάρτησης ℓ είναι οι ακόλουθες:
(α) Αν I_1, I_2 είναι δυό διαστήματα και $I_1 \subset I_2$, τότε $\ell(I_1) \leq \ell(I_2)$.
(β) Αν $I_1, I_2, \ldots$ είναι πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα μέσα στο διάστημα I τότε

$$\sum_n \ell(I_n) \leq \ell(I).$$

(γ) Αν I είναι ένα διάστημα και x ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε το σύνολο $I + x := \{x + y : y \in I\}$. Τότε το $I + x$ είναι διάστημα και ισχύει $\ell(I + x) = \ell(I)$.

Μιά ακόμη ιδιότητα τού μήκους διαστήματος δίνεται στο παρακάτω λήμμα· αν και είναι διαισθητικά προφανής, χρειάζεται απόδειξη.

Λήμμα 1.1.1 *Αν $I, I_1, I_2, \ldots$ είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους διαστήματα και $I \subset \cup_i I_i$, τότε $\ell(I) \leq \sum_i \ell(I_i)$.*

Απόδειξη.
Αν έστω και ένα από τα I_i έχει άπειρο μήκος, η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\ell(I_i) < \infty$ για κάθε i.
Περίπτωση 1: Το I είναι κλειστό διάστημα, $I = [a, b]$, και τα διαστήματα I_i είναι όλα ανοικτά και πεπερασμένου πλήθους, $I_1, I_2, \ldots, I_n$.
Εφόσον $[a, b] \subset \cup_{i=1}^n I_i$, το σημείο a ανήκει σε κάποιο από τα I_i, έστω στο (α_1, β_1). Δηλαδή ισχύει $\alpha_1 < a < \beta_1$. Αν $\beta_1 < b$, τότε $\beta_1 \in [a, b]$. Άρα το β_1 ανήκει σε κάποιο από τα I_i, έστω στο (α_2, β_2). Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία βρίσκουμε πεπερασμένου πλήθους διαστήματα (α_j, β_j), $j = 1, 2 \ldots, k$ τέτοια ώστε $a \in (\alpha_1, \beta_1)$, $b \in (\alpha_k, \beta_k)$ και $\alpha_j < \beta_{j-1} < \beta_j$, $j = 2, 3, \ldots, k$. Έτσι προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^n \ell(I_i) \geq \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) > \beta_k - \alpha_1 > b - a = \ell(I).$$

Περίπτωση 2: Το I έχει πεπερασμένο μήκος.
Έστω ότι $I =< a, b >$ και $I_i =< \alpha_i, \beta_i >$, $i = 1, 2, \ldots$. Έστω επίσης $\varepsilon > 0$. Τα ανοικτά διαστήματα

$$I'_{-1} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),\ I'_0 = (b - \varepsilon, b + \varepsilon),\ I'_i(\alpha_i - \varepsilon/2^i, \beta_i + \varepsilon/2^i), i = 1, 2, \ldots$$

αποτελούν ανοικτό κάλυμμα τού συμπαγούς συνόλου $[a, b]$. Άρα υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους από αυτά, τα $J_1, \ldots, J_m$, που καλύπτουν το $[a, b]$ κι επομένως και το I. Από την Περίπτωση 1, έχουμε

$$\begin{aligned}
\ell(I) &< \sum_{j=1}^m \ell(J_j) \leq \ell(I'_{-1}) + \ell(I'_0) + \sum_i \ell(I'_i) \\
&\leq 4\varepsilon + \sum_i \ell(I_i) + 2\sum_i \frac{\varepsilon}{2^i} \leq 4\varepsilon + \sum_i \ell(I_i) + 2\sum_{i=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^i} \\
&= \sum_i \ell(I_i) + 6\varepsilon.
\end{aligned}$$

Επειδή η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\ell(I) \leq \sum_i \ell(I_i).$$

Περίπτωση 3: Το I έχει άπειρο μήκος.
Έστω J τυχαίο υποδιάστημα τού I πεπερασμένου μήκους. Προφανώς τα I_i καλύπτουν και το J. Από την περίπτωση 2 προκύπτει ότι

$$\ell(J) \leq \sum_i \ell(I_i). \tag{1.1}$$

Επειδή το J μπορεί να έχει οσοδήποτε μεγάλο μήκος, η (1.1) δίνει

$$\sum_i \ell(I_i) = \infty = \ell(I).$$

$\square$

Η παρακάτω πρόταση προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 1.1.1 και την ιδιότητα (β).

Πρόταση 1.1.2 *Αν το διάστημα I είναι ένωση το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ξένων ανά δύο διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$, τότε $\ell(I) = \sum_n \ell(I_n)$.*

Με βάση λοιπόν τις παραπάνω ιδιότητες τού μήκους διαστήματος, θέλουμε να κατασκευάσουμε μιά συνολοσυνάρτηση μ με τις ιδιότητες:
(1) Η μ ορίζεται για κάθε υποσύνολο τού $\mathbb{R}$.
(2) Για κάθε $E \subset \mathbb{R}$, ισχύει $\mu(E) \geq 0$.
(3) Για κάθε διάστημα I, ισχύει $\mu(I) = \ell(I)$.
(4) Αν $E_1 \subset E_2$, τότε $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.
(5) Αν $E \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, και $E + x := \{x + y : y \in E\}$, τότε $\mu(E + x) = \mu(E)$.
(6) Αριθμήσιμη προσθετικότητα: Αν $E_1, E_2, \ldots$ είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ξένα ανά δύο υποσύνολα τού $\mathbb{R}$, τότε $\mu(\cup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$.

Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει συνολοσυνάρτηση μ με τις ιδιότητες (1)-(6). Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε μιά συνολοσυνάρτηση (το εξωτερικό μέτρο Lebesgue) που έχει τις ιδιότητες (1)-(5) και μιά άλλη συνολοσυνάρτηση (το μέτρο Lebesgue) που έχει τις ιδιότητες (2)-(6).

1.2 Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Έστω E ένα υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Λέμε ότι τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ *καλύπτουν* το E αν $E \subset \cup_k I_k$. Θεωρούμε όλες τις οικογένειες $\{I_k\}$ το πολύ αριθμησίμου πλήθους ανοικτών διαστημάτων που καλύπτουν το E. Προφανώς υπάρχουν άπειρες τέτοιες οικογένειες. Για κάθε τέτοια οικογένεια θεωρούμε το συνολικό μήκος $\sum_k l(I_k)$ των διαστημάτων της. Έτσι ορίζεται το σύνολο

$$\left\{ \sum_k l(I_k) : \quad E \subset \bigcup_k I_k \right\}$$

που είναι υποσύνολο τού $[0, \infty]$. Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.1 *Ονομάζουμε εξωτερικό μέτρο Lebesgue τη συνολοσυνάρτηση* $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ *που ορίζεται με την ισότητα:*

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_k \ell(I_k) : \quad E \subset \bigcup_k I_k \right\}, \quad E \subset \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Από τον ορισμό του κατώτερου πέρατος προκύπτει ότι το εξωτερικό μέτρο ενός συνόλου E είτε είναι άπειρο είτε έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:
(α) Αν $\{I_k\}$ είναι μιά το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων πού καλύπτουν το E, τότε

$$m^*(E) \leq \sum_k \ell(I_k).$$

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μιά το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια $\{I_k\}$ ανοικτών διαστημάτων τέτοια ώστε

$$E \subset \bigcup_k I_k \quad \text{και} \quad \sum_k \ell(I_k) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το κενό σύνολο έχει εξωτερικό μέτρο Lebesgue ίσο με το 0. Πράγματι, έστω $a \in \mathbb{R}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $\varnothing \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Άρα το ανοικτό διάστημα $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ καλύπτει το $\varnothing$. Από τον Ορισμό 1.2.1 προκύπτει ότι $m^*(\varnothing) \leq 2\varepsilon$. Επειδή αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $m^*(\varnothing) = 0$. Παρομοίως, επειδή $\{a\} \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$, προκύπτει ότι κάθε μονοσύνολο έχει εξωτερικό μέτρο Lebesgue ίσο με το 0. Γενικότερα ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.2.2 *Κάθε το πολύ αριθμήσιμο σύνολο έχει εξωτερικό μέτρο Lebesgue ίσο με το* 0.

Απόδειξη.
Έστω $E = \{a_1, a_2, \dots\}$ ένα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$E \subset \bigcup_j \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, \ a_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right).$$

Άρα

$$m^*(E) \leq 2\sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} \leq 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon.$$

Επειδή η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $m^*(E) = 0$.
□

Πρόταση 1.2.3 *Αν $E_1 \subset E_2$, τότε $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$.*

Απόδειξη.
Αν μιά οικογένεια ανοικτών διαστημάτων καλύπτει το E_2, τότε θα καλύπτει και το E_1. Άρα

$$\left\{\sum_k \ell(I_k) : E_2 \subset \bigcup_k I_k\right\} \subset \left\{\sum_k \ell(I'_k) : E_1 \subset \bigcup_k I'_k\right\}.$$

Παίρνουμε inf και προκύπτει ότι $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$. □

Πρόταση 1.2.4 *Για κάθε διάστημα I ισχύει $m^*(I) = \ell(I)$.*

Απόδειξη.
Περίπτωση 1: Το I είναι φραγμένο διάστημα.
Έστω ότι $I =< a, b >$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $I \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Άρα $m^*(I) \leq b - a + 2\varepsilon$. Επειδή αυτή η ανισότητα ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $m^*(I) \leq b - a = \ell(I)$. Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε τυχαία το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων I_k που καλύπτουν το I. Το Λήμμα 1.1.1 δίνει $l(I) \leq \sum_k \ell(I_k)$. Άρα ο αριθμός $\ell(I)$ είναι κάτω φράγμα τού συνόλου $\{\sum_k \ell(I_k) : I \subset \cup_k I_k\}$. Επομένως $\ell(I) \leq m^*(I)$.
Περίπτωση 2: Το I είναι μη φραγμένο διάστημα.
Τότε το I έχει μιά από τις μορφές $< a, \infty)$, $(-\infty, a >$, $(-\infty, \infty)$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση $I = (a, \infty)$· (οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με παρόμοιο τρόπο). Θέτουμε $I_n = (a, n)$, για κάθε φυσικό $n > a$. Από την Περίπτωση 1 και την Πρόταση 1.2.3 προκύπτει $n - a = \ell(I_n) = m^*(I_n) \leq m^*(I)$. Παίρνουμε όριο για $n \to \infty$ και προκύπτει $m^*(I) = \infty = \ell(I)$. □

Οι Προτάσεις 1.2.2 και 1.2.4 δίνουν μιά ακόμη απόδειξη ότι κάθε διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Θεώρημα 1.2.5 (Αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα) *Αν $E_1, E_2, \ldots$ είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους υποσύνολα τού $\mathbb{R}$, τότε*

$$m^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_k m^*(E_k). \tag{1.3}$$

Απόδειξη.
Αν έστω και ένα από τα E_k έχει άπειρο εξωτερικό μέτρο, η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m^*(E_k) < \infty$ για κάθε k.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό τού $m^*(E_k)$ ως κατώτερου πέρατος προκύπτει ότι για καθένα k, υπάρχει το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων $I_{k,1},\ I_{k,2}, \ldots$ τέτοια ώστε

$$E_k \subset \bigcup_j I_{k,j} \quad \text{και} \quad \sum_j \ell(I_{k,j}) < m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{1.4}$$

Η ένωση όλων των οικογενειών αυτών είναι το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων που καλύπτουν το σύνολο $\cup_k E_k$. Επομένως

$$m^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_{k,j} \ell(I_{k,j}). \tag{1.5}$$

Από τις (1.4) και (1.5) έπεται ότι

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_k E_k\right) &\leq \sum_{k,j} \ell(I_{k,j}) = \sum_k \sum_j \ell(I_{k,j}) < \sum_k \left(m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\ &\leq \sum_k m^*(E_k) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Επειδή η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$m^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \sum_k m^*(E_k).$$

□

Θα δείξουμε τώρα ότι το εξωτερικό μέτρο ενός συνόλου E μπορεί να προσεγγιστεί από το εξωτερικό μέτρο ενός ανοικτού υπερσυνόλου του και είναι ίσο με το εξωτερικό μέτρο ενός **G_δ-συνόλου**, δηλαδή ενός συνόλου που είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων:

Πρόταση 1.2.6 *Έστω $E \subset \mathbb{R}$.*
(α) *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτό σύνολο A τέτοιο ώστε*

$$E \subset A \quad \textit{και} \quad m^*(A) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

(β) *Υπάρχει G_δ-σύνολο G τέτοιο ώστε*

$$E \subset G \quad \textit{και} \quad m^*(E) = m^*(G).$$

Απόδειξη.
(α) Αν $m^*(E) = \infty$, η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $m^*(E) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει μιά το πολύ αριθμήσιμη οικογένεια $\{I_k\}$ ανοικτών διαστημάτων τέτοια ώστε

$$E \subset \bigcup_k I_k \quad \text{και} \quad \sum_k \ell(I_k) < m^*(E) + \varepsilon.$$

Θέτουμε $A = \cup_k I_k$. Το A είναι ανοικτό υπερσύνολο τού E και

$$m^*(A) = m^*(\cup_k I_k) \leq \sum_k m^*(I_k) = \sum_k \ell(I_k) < m^*(E) + \varepsilon.$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, βρίσκουμε ανοικτα σύνολα A_n τέτοια ώστε

$$E \subset A_n \quad \text{και} \quad m^*(A_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε $G = \cap_n A_n$. Το G είναι G_δ-σύνολο που περιέχει το E και

$$m^*(E) \leq m^*(G) \leq m^*(A_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παίρνουμε όρια για $n \to \infty$ και προκύπτει $m^*(E) = m^*(G)$. $\square$

Τέλος αποδεικνύουμε ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue έχει και την ιδιότητα (5).

Πρόταση 1.2.7 *Αν $E \subset \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε $m^*(E + x) = m^*(E)$.*

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό τού m^* προκύπτει ότι υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ανοικτά διαστήματα I_i τέτοια ώστε

$$E \subset \bigcup_i I_i \quad \text{και} \quad \sum_i \ell(I_i) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

Τα ανοικτά διαστήματα $I_i + x$ καλύπτουν το $E + x$. Χρησιμοποιούμε την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα και συμπεραίνουμε ότι

$$m^*(E + x) \leq \sum_i \ell(I_i + x) = \sum_i \ell(I_i) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

Επειδή αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $m^*(E+x) \leq m^*(E)$.

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι $E = (E + x) - x$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $m^*(E) = m^*((E + x) - x) \leq m^*(E + x)$. $\square$

Παράδειγμα 1.2.8 Θα υπολογίσουμε το εξωτερικό μέτρο τού συνόλου C τού Cantor. Ισχύει

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

όπου καθένα I_n είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots$, έκαστο μήκους $\frac{1}{3^n}$. Άρα

$$m^*(C) \leq m^*(I_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$m^*(I_n) = m^* \left(\bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j} \right) \leq \sum_{j=1}^{2^n} m^*(I_{n,j}) = \sum_{j=1}^{2^n} \ell(I_{n,j}) = 2^n \frac{1}{3^n}.$$

Επομένως

$$m^*(C) \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ προκύπτει ότι $m^*(C) = 0$.

Ενώ λοιπόν το C από συνολοθεωρητικής πλευράς είναι μεγάλο (υπεραριθμήσιμο), από μετροθεωρητικής πλευράς είναι μικρό (έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με το 0).

1.3 Μετρήσιμα σύνολα

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το εξωτερικό μέτρο Lebesgue είναι μιά συνολοσυνάρτηση που έχει τις ιδιότητες (1)-(5) της παραγράφου 1.1. Το Θεώρημα 1.2.5 λέει ότι η m^* είναι αριθμήσιμα υποπροσθετική· μπορεί να αποδειχθεί όμως ότι δεν είναι αριθμήσιμα προσθετική, δηλαδή δεν έχει την ιδιότητα (6). Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μιά κλάση υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$, τα μετρήσιμα σύνολα. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι αν περιορίσουμε την m^* στα μετρήσιμα σύνολα, προκύπτει μια συνολοσυνάρτηση (το μέτρο Lebesgue) που έχει τις ιδιότητες (2)-(6).

Ορισμός 1.3.1 Ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ λέγεται (Lebesgue) **μετρήσιμο** αν

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{1.7}$$

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M}$ τό σύνολο των μετρήσιμων υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.3.2 Για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$. Από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα προκύπτει ότι

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Άρα για να ελέγξουμε αν ένα σύνολο E είναι μετρήσιμο, αρκεί να ελέγξουμε αν ισχύει η ανισότητα

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{1.8}$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$. Η ανισότητα αυτή ισχύει προφανώς για κάθε σύνολο A με $m^*(A) = \infty$. Άρα αρκεί να ελέγξουμε την (1.8) για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ με $m^*(A) < \infty$.

Παρατήρηση 1.3.3 Από τον Ορισμό 1.3.1 προκύπτει άμεσα ότι αν ένα σύνολο E είναι μετρήσιμο, τότε και το συμπλήρωμά του E^c είναι μετρήσιμο. Επίσης είναι προφανές ότι τα σύνολα $\varnothing$ και $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα.

Παρατήρηση 1.3.4 Αν $E \subset \mathbb{R}$ και $m^*(E) = 0$, τότε το E είναι μετρήσιμο. Πράγματι, έστω $A \subset \mathbb{R}$. Επειδή $A \cap E \subset E$, έχουμε $m^*(A \cap E) \leq m^*(E)$· άρα $m^*(A \cap E) = 0$. Επομένως ισχύει

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

δηλαδή το E είναι μετρήσιμο.

Παράδειγμα 1.3.5 Από τον Ορισμό και τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι κάθε πεπερασμένο και κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι μετρήσιμο. Επίσης τα σύνολα C, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus C$ είναι όλα μετρήσιμα.

Λήμμα 1.3.6 *Αν τα E_1, E_2 είναι μετρήσιμα σύνολα, τότε η ένωσή τους και η τομή τους είναι μετρήσιμα σύνολα.*

Απόδειξη.
Έστω A τυχαίο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Για τη μετρησιμότητα της ένωσης αρκεί να δείξουμε ότι

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c). \tag{1.9}$$

Επειδή $E_1 \in \mathcal{M}$ ισχύει

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c). \tag{1.10}$$

Επειδή $E_2 \in \mathcal{M}$ ισχύει

$$m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{1.11}$$

Από τις (1.11), (1.10) και την υποπροσθετικότητα τού εξωτερικού μέτρου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &\geq m^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \end{aligned}$$

και η (1.9) αποδείχθηκε.

Για την τομή παρατηρούμε ότι $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c \in \mathcal{M}$. □

Λήμμα 1.3.7 *Αν $E_1, E_2, \ldots, E_n$ είναι πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα, τότε*

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Απόδειξη.
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ το λήμμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1$ σύνολα. Θεωρούμε n ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Επειδή αυτά είναι ξένα ανά δύο έχουμε

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap E_n = A \cap E_n$$

και

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap E_n^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right).$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο αυτές ισότητες, το γεγονός ότι το E_n είναι μετρήσιμο, και την επαγωγική υπόθεση συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cap E_n\right) + m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cap E_n^c\right) \\ &= m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) \\ &= m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i). \end{aligned}$$

□

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.7 για $A = \mathbb{R}$ προκύπτει το ακόλουθο.

Πόρισμα 1.3.8 *Αν $E_1, E_2, \ldots, E_n$ είναι πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα, τότε*

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i).$$

Θα χρειαστούμε τώρα το ακόλουθο απλό λήμμα.

Λήμμα 1.3.9 *Αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι αριθμήσιμου πλήθους μετρήσιμα σύνολα, τότε υπάρχουν αριθμήσιμου πλήθους ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα $B_1, B_2, \ldots$ τέτοια ώστε* (α) $B_i \subset A_i$, $\forall i$ *και* (β) $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Απόδειξη.
Θέτουμε $B_1 = A_1$ και γιά $n > 1$, $B_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$. Τότε λόγω τού Λήμματος 1.3.6, $B_n \in \mathcal{M}$. Είναι φανερό ότι $B_n \subset A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ότι τα B_n είναι ξένα ανά δύο και ότι $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$. □

Πρόταση 1.3.10 *Η ένωση αριθμήσιμου πλήθους μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη.
Θεωρούμε μιά αριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων συνόλων $\{E_n\}$ και θέτουμε

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Έστω A τυχαίο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{1.12}$$

Λόγω τού Λήμματος 1.3.9, υπάρχουν ξένα ανά δύο, μετρήσιμα σύνολα $B_1, B_2, \ldots$ τέτοια ώστε

$$B_n \subset E_n \quad \text{και} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = E.$$

Θέτουμε

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Χάρη στο Λήμμα 1.3.6, $F_n \in \mathcal{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Η μετρησιμότητα τού F_n, η προφανής σχέση $E^c \subset F_n^c$ και το Λήμμα 1.3.7 δίνουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right) + m^*(A \cap E^c) \\ &= \sum_{i=1}^n m^*(A \cap B_i) + m^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

Παίρνουμε όρια για $n \to \infty$ και προκύπτει

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^\infty m^*(A \cap B_i) + m^*(A \cap E^c). \tag{1.13}$$

Η (1.13) με χρήση της υποπροσθετικότητας τού εξωτερικού μέτρου δίνει

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty (A \cap B_i)\right) + m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

και η (1.12) αποδείχθηκε. □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3.10 και απλές συνολοθεωρητικές πράξεις είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι και η *τομή* το πολύ αριθμήσιμου πλήθους μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο (Άσκηση 1.6.12).

Πρόταση 1.3.11 *Κάθε διάστημα είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη.
Ως πρώτη περίπτωση θεωρούμε ένα διάστημα της μορφής (a, ∞). Παίρνουμε τυχαίο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ με $m^*(A) < \infty$ και θέτουμε

$$A_+ = A \cap (a, \infty) \quad \text{και} \quad A_- = A \cap (-\infty, a].$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$m^*(A) \geq m^*(A_+) + m^*(A_-). \tag{1.14}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ τέτοια ώστε

$$A \subset \bigcup_n I_n \quad \text{και} \quad \sum_n l(I_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Χωρίζουμε καθένα από τα I_n σε δύο σύνολα I_n^+ και I_n^- θέτοντας $I_n^+ = I_n \cap (a, \infty)$ και $I_n^- = I_n \cap (-\infty, a]$. Για καθένα n, ισχύει $I_n = I_n^+ \cup I_n^-$ και $I_n^+ \cap I_n^- = \varnothing$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$m^*(I_n) = l(I_n) = l(I_n^+) + l(I_n^-) = m^*(I_n^+) + m^*(I_n^-).$$

Επίσης, επειδή $A_+ \subset \cup_n I_n^+$ και $A_- \subset \cup_n I_n^-$, ισχύει

$$m^*(A_+) \leq m^*\left(\bigcup_n I_n^+\right) \leq \sum_n m^*(I_n^+)$$

και

$$m^*(A_-) \leq m^*\left(\bigcup_n I_n^-\right) \leq \sum_n m^*(I_n^-).$$

Άρα

$$\begin{aligned} m^*(A_+) + m^*(A_-) &\leq \sum_n m^*(I_n^+) + \sum_n m^*(I_n^-) = \sum_n \big(m^*(I_n^+) + m^*(I_n^-)\big) \\ &= \sum_n l(I_n) < m^*(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Επειδή η ανισότητα αυτή ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $m^*(A_+) + m^*(A_-) \leq m^*(A)$ και η (1.14) αποδείχθηκε.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι κάθε διάστημα της μορφής (a, ∞) είναι μετρήσιμο. Άρα και κάθε διάστημα της μορφής $(-\infty, a]$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα τού (a, ∞). Επίσης $(-\infty, b) \in \mathcal{M}$, $\forall b \in \mathbb{R}$ διότι

$$(-\infty,\ b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty,\ \ b - \frac{1}{n}\right].$$

Αν $a < b$, τότε $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$. Άρα $(a, b) \in \mathcal{M}$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι όλα τα διαστήματα είναι μετρήσιμα σύνολα. □

Πρόταση 1.3.12 *Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο τού* $\mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη.
Είναι γνωστό ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων. Από τις Προτάσεις 1.3.10 και 1.3.11 προκύπτει λοιπόν ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι μετρήσιμο. Επίσης κάθε κλειστό σύνολο είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα ανοικτού συνόλου. □

Χάρη στις παραπάνω προτάσεις όλα τα σύνολα που προκύπτουν ξεκινώντας από διαστήματα και χρησιμοποιώντας αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις είναι μετρήσιμα. Για παράδειγμα οι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων, δηλαδή τα G_δ-σύνολα, είναι μετρήσιμα. Παρομοίως οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (οι οποίες ονομάζονται **F_σ-σύνολα**) είναι μετρήσιμα σύνολα.

Πρόταση 1.3.13 *Αν $E \in \mathcal{M}$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε $x + E \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη.
Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E + x)) + m^*(A \cap (E + x)^c). \tag{1.15}$$

Όμως

$$A \cap (E + x) = ((A - x) \cap E) + x$$

και

$$A \cap (E + x)^c = A \cap (E^c + x) = ((A - x) \cap E^c) + x.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα αυτές τις δύο συνολοθεωρητικές ισότητες και την Πρόταση 1.2.7, βλέπουμε ότι η (1.15) είναι ισοδύναμη με την

$$m^*(A - x) = m^*((A - x) \cap E) + m^*((A - x) \cap E^c)$$

η οποία ισχύει επειδή $E \in \mathcal{M}$. □

1.4 Το μέτρο Lebesgue

Ορισμός 1.4.1 Ονομάζουμε **μέτρο Lebesgue** τη συνολοσυνάρτηση $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ που ορίζεται από την ισότητα

$$m(E) = m^*(E), \quad E \in \mathcal{M}.$$

Η συνολοσυνάρτηση m είναι λοιπόν ο περιορισμός της m^* στο σύνολο $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι η m έχει τις ιδιότητες (2)-(5) της παραγράφου 1.1. Θα δούμε τώρα ότι η m έχει και την ιδιότητα (6), είναι δηλαδή αριθμήσιμα προσθετική συνολοσυνάρτηση.

Θεώρημα 1.4.2 (Αριθμήσιμη προσθετικότητα) *Αν $E_1, E_2, \ldots$ είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσύνολα τού $\mathbb{R}$, τότε*

$$m\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i m(E_i).$$

Απόδειξη.
Από το Πόρισμα 1.3.8 γνωρίζουμε ότι η ισότητα ισχύει για πεπερασμένου πλήθους σύνολα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα E_i είναι αριθμήσιμου πλήθους. Η ανισότητα

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

ισχύει λόγω τού Θεωρήματος 1.2.5. Αποδεικνύουμε την αντίστροφη ανισότητα:

Από το Πόρισμα 1.3.8, το γεγονός ότι τα E_i είναι μετρήσιμα και την προφανή σχέση

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Παίρνουμε όρια για $n \to \infty$ και προκύπτει ότι

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

□

Πρόταση 1.4.3 *Δίνονται δύο μετρήσιμα σύνολα E_1, E_2. Τότε:*
(α) *Αν $E_1 \subset E_2$, τότε $m(E_2) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1)$.*
Αν επιπλέον $m(E_1) < \infty$, τότε $m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1)$.
(β) $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.

Απόδειξη.
(α) Ισχύει $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$. Επειδή αυτή είναι ένωση δύο ξένων συνόλων, η προσθετικότητα τού μέτρου Lebesgue δίνει $m(E_2) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1)$. Αν επιπλέον $m(E_1) < \infty$, αφαιρούμε απο δεξί και αριστερό μέλος το $m(E_1)$ και προκύπτει $m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1)$.
(β) Αν $m(E_1) = \infty$ ή $m(E_2) = \infty$, τότε $m(E_1 \cup E_2) = \infty$ και η ισότητα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m(E_1) < \infty$ και $m(E_2) < \infty$. Ισχύει

$$E_1 \cup E_2 = [E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)] \ \cup \ [E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)] \ \cup \ [E_1 \cap E_2].$$

Αυτή είναι ένωση τριών ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων πεπερασμένου μέτρου. Από το (α) προκύπτει:

$$\begin{aligned} m(E_1 \cup E_2) &= m(E_1) - m(E_1 \cap E_2) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2) + m(E_1 \cap E_2) \\ &= m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.4.4 Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(α) Το E είναι μετρήσιμο.
(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτό σύνολο $A \supset E$ τέτοιο ώστε $m^*(A \backslash E) < \varepsilon$.
(γ) Υπάρχει ένα G_δ-σύνολο $G \supset E$ τέτοιο ώστε $m^*(G \setminus E) = 0$.
(δ) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κλειστό σύνολο $K \subset E$ τέτοιο ώστε $m^*(E \setminus K) < \varepsilon$.
(ε) Υπάρχει ένα F_σ-σύνολο $F \subset E$ τέτοιο ώστε $m^*(E \setminus F) = 0$.

Απόδειξη.
(α)⇒(β): Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $m(E) < \infty$. Υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ανοικτά διαστήματα $\{I_j\}$ τέτοια ώστε

$$E \subset \bigcup_j I_j \quad \text{και} \quad \sum_j \ell(I_j) < m(E) + \varepsilon.$$

Θέτουμε $A = \cup_j I_j$. Το A είναι ανοικτό υπερσύνολο τού E και ισχύει

$$m(E) \leq m(A) = m(\cup_j I_j) \leq \sum_j \ell(I_j) < m(E) + \varepsilon. \tag{1.16}$$

Λόγω τής Πρότασης 1.4.3 και επειδή $m(E) < \infty$, προκύπτει ότι

$$m(A \setminus E) = m(A) - m(E) < \varepsilon.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $m(E) = \infty$. Θέτουμε $E_n = E \cap (-n, n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα σύνολα E_n είναι όλα μετρήσιμα και έχουν πεπεραμένο μέτρο. Επομένως, εφαρμόζοντας την προηγούμενη περίπτωση, βρίσκουμε για κάθε n, ένα ανοικτό σύνολο $A_n \supset E_n$ με $m(A_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n$. Θέτουμε $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$. Το A είναι ανοικτό υπερσύνολο τού E και ισχύει

$$A \setminus E = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \setminus \bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus E_n).$$

Άρα

$$m(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^\infty m(A_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

(β)⇒(γ): Λόγω τού (β), για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ανοικτό σύνολο $A_n \supset E$ τέτοιο ώστε $m(A_n \setminus E) < 1/n$. Θέτουμε $G = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Το G είναι G_δ υπερσύνολο τού E και

$$G \setminus E = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \setminus E \subset A_n \setminus E, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$m^*(G \setminus E) \leq m^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς $m^*(G \setminus E) = 0$.

(γ)⇒(α): Λόγω τού (γ), υπάρχει G_δ-σύνολο $G \supset E$ τέτοιο ώστε $m^*(G \setminus E) = 0$. Ισχύει $E = G \setminus (G \setminus E)$. Το G είναι μετρήσιμο επειδή είναι G_δ, ενώ το $G \setminus E$ είναι μετρήσιμο επειδή έχει μηδενικό μέτρο. Άρα $E \in \mathcal{M}$.

(α)⇒(δ): Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι $E \in \mathcal{M}$. Άρα $E^c \in \mathcal{M}$. Λόγω τού (β), υπάρχει ανοικτό σύνολο $A \supset E^c$ με $m(A \setminus E^c) < \varepsilon$. Θεωρούμε το κλειστό σύνολο $K = A^c$. Αυτό είναι υποσύνολο τού E και ισχύει $m(E \setminus K) = m(A \setminus E^c) < \varepsilon$.

(δ)⇒(ε): Εφαρμόζοντας το (δ), βρίσκουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ένα κλειστό υποσύνολο K_n τού E με $m^*(E \setminus K_n) < 1/n$. Θέτουμε $F = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$. Το F είναι F_σ υποσύνολο τού E και ισχύει

$$E \setminus F = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus K_n) \subset E \setminus K_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$m^*(E \setminus F) \leq m^*(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς $m^*(E \setminus F) = 0$.

(ε)⇒(α): Λόγω τού (ε), υπάρχει F_σ-σύνολο $F \subset E$ τέτοιο ώστε $m^*(E \setminus F) = 0$. Επειδή $E = F \cup (E \setminus F)$, το E είναι μετρήσιμο. □

Θεώρημα 1.4.5 *Έστω $\{E_n\}$ μιά ακολουθία μετρήσιμων συνόλων.*
(α) *Αν $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, τότε*

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

(β) *Αν* $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ *και* $m(E_1) < \infty$, *τότε*

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Απόδειξη.
(α) Θέτουμε $F_1 = E_1$ και $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ για $n > 1$. Τα σύνολα F_n είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Επίσης

$$\bigcup_{j=1}^{n} F_j = E_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Χρησιμοποιούμε και την αριθμήσιμη προσθετικότητα τού m και παίρνουμε

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} m(F_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n). \end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζουμε το (α) στην ακολουθία συνόλων $\{E_1 \setminus E_n\}_{n=1}^{\infty}$ και παίρνουμε

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_n)\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_1 \setminus E_n)$$

ή, ισοδύναμα

$$m\left(E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_1 \setminus E_n). \tag{1.17}$$

Η υπόθεση $m(E_1) < \infty$ συνεπάγεται ότι $m(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$. Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 1.4.3 και η (1.17) δίνει

$$m(E_1) - m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Επειδή $m(E_1) < \infty$ μπορούμε να απαλείψουμε το $m(E_1)$ και προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. $\square$

Παράδειγμα 1.4.6 Έχουμε δεί στο Παράδειγμα 1.2.8 ότι το εξωτερικό μέτρο τού συνόλου C τού Cantor είναι ίσο με 0. Το C είναι μετρήσιμο σύνολο αφού είναι κλειστό. Επομένως $m(C) = 0$. Θα παρουσιάσουμε τώρα μιά άλλη απόδειξη βασισμένη στο Θεώρημα 1.4.5. Ισχύει

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

όπου καθένα I_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο, κλειστών διαστημάτων $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots,$ έκαστο μήκους $\frac{1}{3^n}$. Από την προσθετικότητα τού μέτρου προκύπτει ότι $m(I_n) = 2^n/3^n$. Επιπλέον ισχύει $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ και $m(I_1) \leq 1$. Έτσι το Θεώρημα 1.4.5 (β) δίνει

$$m(C) = \lim_{n\to\infty} m(I_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0.$$

Παράδειγμα 1.4.7 Έστω $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Η $\{A_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Άρα

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Έστω $B_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, 1\right]$, $n = 2, 3, \ldots$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο της τομής των B_n. Η $\{B_n\}$ δεν είναι φθίνουσα ακολουθία. Άρα το Θεώρημα 1.4.5 δεν εφαρμόζεται. Όμως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\frac{1}{2},\ 1\right].$$

Άρα

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \frac{1}{2}.$$

1.5 * Ένα μή μετρήσιμο σύνολο

Είδαμε ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι μετρήσιμο. Επομένως κάθε σύνολο που κατασκευάζεται ξεκινώντας από ανοικτά σύνολα και χρησιμοποιώντας αριθμήσιμες ενώσεις και συμπληρώματα είναι μετρήσιμο. Με βάση αυτή την παρατήρηση θα μπορούσε να εικάσει κάποιος ότι όλα τα υποσύνολα τού $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα και επομένως το μέτρο Lebesgue ταυτίζεται με το εξωτερικό μέτρο. Η εικασία αυτή δεν είναι αληθής. Θα κατασκευάσουμε τώρα ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$.

Ας είναι $s > 0$ και A ένα μετρήσιμο υποσύνολο τού $[-s, s]$ με $m(A) > 0$. Λέμε ότι δυό σημεία $x, y \in A$ είναι ισοδύναμα αν $x - y \in \mathbb{Q}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι έτσι ορίζεται μιά σχέση ισοδυναμίας στο A. Η κλάση ισοδυναμίας τού $x \in A$ είναι το σύνολο

$$A_x = \{x + r : x + r \in A, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Κάθε τέτοια κλάση είναι σε ένα - προς - ένα αντιστοιχία με ένα υποσύνολο τού $\mathbb{Q}$. Επομένως είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο. Το σύνολο A είναι υπεραριθμήσιμο (αφού $m(A) > 0$) και γράφεται ως ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας. Επομένως υπάρχουν υπεραριθμήσιμου πλήθους ξένες κλάσεις ισοδυναμίας. Θεωρούμε ένα σύνολο P που περιέχει ακριβώς ένα αντιπόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Θα δείξουμε ότι το σύνολο P δεν είναι μετρήσιμο.

Οι ρητοί που προκύπτουν ως διαφορές στοιχείων τού διαστήματος $[-s, s]$ είναι ακριβώς οι ρητοί τού $[-2s, 2s]$. Έστω $r_1, r_2, \ldots$ μιά αρίθμηση αυτών των ρητών. Θέτουμε $P_j = P + r_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Τα σύνολα αυτά είναι ξένα ανά δύο και ισχύει

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \subset [-3s, 3s]. \tag{1.18}$$

Ας υποθέσουμε ότι το P είναι μετρήσιμο. Τότε καθένα από τα P_j είναι μετρήσιμο και $m(P) = m(P_j)$. Έτσι η (1.18) δίνει

$$m(A) \le m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) \le 6s. \tag{1.19}$$

Όμως

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(P) \tag{1.20}$$

Άρα

$$m(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} m(P) \le 6s. \tag{1.21}$$

Αν $m(P) = 0$, τότε η (1.21) δίνει $m(A) = 0$· άτοπο. Αν $m(P) > 0$, τότε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} m(P)$ δεν συγκλίνει· πάλι άτοπο λόγω τής (1.21). Άρα το P δεν είναι μετρήσιμο.

Χρησιμοποιώντας μη μετρήσιμα σύνολα μπορούμε να δείξουμε ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue δεν έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας: Έστω P ένα μη μετρήσιμο σύνολο. Εφαρμόζοντας την άρνηση τού ορισμού των μετρήσιμων συνόλων βρίσκουμε σύνολο A τέτοιο ώστε

$$m(A) < m(A \cap P) + m(A \cap P^c).$$

Θέτουμε $A_1 = A \cap P$, $A_2 = A \cap P^c$ και βλέπουμε ότι $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ και $m(A) < m(A_1) + m(A_2)$.

1.6 Ασκήσεις

1.6.1 Αν $E \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο σύνολο, δείξτε ότι $m^*(E) < \infty$.

1.6.2 Αν το σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ περιέχει ένα τουλάχιστον εσωτερικό σημείο, δείξτε ότι $m^*(E) > 0$.

1.6.3 Αν $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, δείξτε ότι:
(α) Αν $m^*(E_1) = 0$, τότε $m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_2) = m^*(E_2 \setminus E_1)$.
(β) Αν $m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1 \cap E_2)$, τότε $m^*(E_1) = m^*(E_2)$.

1.6.4 Έστω $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Δείξτε ότι $m^*(E) = 0$ αν και μόνο αν $m^*(E_n) = 0$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$.

1.6.5 Δείξτε ότι για φραγμένα σύνολα E_1, E_2 με $E_1 \subset E_2$ ισχύει

$$m^*(E_2 \setminus E_1) \geq m^*(E_2) - m^*(E_1).$$

1.6.6 Αν $E \subset \mathbb{R}$ και $r > 0$ ορίζουμε $rE = \{rx : x \in E\}$. Αν $m^*(E) = l$, πόσο είναι το $m^*(rE)$;

1.6.7 Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε $E^2 := \{x^2 : x \in E\}$. Δείξτε ότι αν $m^*(E) = 0$, τότε $m^*(E^2) = 0$.

1.6.8 Αν $E \subset [a, b]$ και $m^*(E) = 0$, δείξτε ότι το $E^c \cap [a, b]$ είναι πυκνό υποσύνολο τού $[a, b]$.

1.6.9 Δείξτε ότι για $E \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(E) = \inf\{m^*(A) : A \text{ ανοικτό και } E \subset A\}.$$

1.6.10 Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$ για κάποια σταθερά K και για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι για κάθε $E \subset \mathbb{R}$, $m^*(f(E)) \leq K\, m^*(E)$.

1.6.11 Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο. Δείξτε ότι αν $m^*(E) = 0$, τότε $m^*(f(E)) = 0$.

1.6.12 Δείξτε ότι η τομή αριθμήσιμου πλήθους μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο.

1.6.13 Δείξτε ότι αν $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{M}$, τότε

$$\begin{aligned} m(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &+ m(E_1 \cap E_2) + m(E_2 \cap E_3) + m(E_1 \cap E_3) \\ &= m(E_1) + m(E_2) + m(E_3) + m(E_1 \cap E_2 \cap E_3). \end{aligned}$$

1.6.14 Δείξτε ότι για $A, B \in \mathcal{M}$ με $m(A \cap B) < \infty$, ισχύει

$$m(A \triangle B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B).$$

1.6.15 Δείξτε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο και έχει πεπερασμένο μέτρο.

1.6.16 Για $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $E_n = \{x \in [0, 2\pi] : \sin x < \frac{1}{n}\}$. Υπολογίστε τα $m(\cap_n E_n)$ και $\lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

1.6.17 Βρείτε το μέτρο του συνόλου $E = (0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

1.6.18 Βρείτε δυό σύνολα $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε $E_1 \subset E_2$, $m(E_1) = m(E_2)$ και $m(E_2 \setminus E_1) > 0$.

1.6.19 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $E \subset \mathbb{R}$ και $m^*(E) = 0$, τότε το E είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμο.
(β) Αν E είναι ένα σύνολο που δεν είναι μετρήσιμο, τότε $m^*(E) > 0$.

1.6.20 Το σύνολο E είναι μετρήσιμο και έχει πεπερασμένο μέτρο. Δείξτε ότι για κάθε $F \supset E$,

$$m^*(F \setminus E) = m^*(F) - m(E).$$

1.6.21 Δείξτε ότι αν $m^*(E) < \infty$ και υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο F τού E με $m(F) = m^*(E)$, τότε το E είναι μετρήσιμο.

1.6.22 Για $E, F \subset \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$m^*(E \cup F) + m^*(E \cap F) \leq m^*(E) + m^*(F).$$

1.6.23 Έστω A ένα ανοικτό σύνολο. Αν $E \subset A$ και $F \subset A^c$, δείξτε ότι

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F).$$

1.6.24 Αν $A, B \subset \mathbb{R}$ και

$$d(A, B) := \inf\{|x - y| : x \in A,\ y \in B\} > 0,$$

δείξτε ότι

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F).$$

1.6.25 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $\{E_n\}$ είναι μιά ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και το όριο $\lim_{n\to\infty} m(E_n)$ υπάρχει, τότε

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

(β) Αν $\{E_n\}$ είναι μιά ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \limsup_{n\to\infty} m(E_n).$$

1.6.26 Για $E \subset [a, b]$ δείξτε ότι $m^*(E) = 0$ αν και μόνο αν το E μπορεί να καλυφθεί από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $\{I_n\}$ τέτοια ώστε (α) $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \infty$ και (β) κάθε $x \in E$ ανήκει σε *άπειρα* από τα I_n.

1.6.27 Δίνεται μιά αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών $\{a_n\}$. Αν $E_n = (-a_n, a_n]$, βρείτε το $m(\cup_n E_n)$.

1.6.28 Έστω A το σύνολο των σημείων τού $[0, 1]$ έτσι ώστε $x \in A$ αν και μόνο αν σε μιά δεκαδική παράσταση τού x δεν υπάρχει το ψηφίο 5. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

1.6.29 Βρείτε το μέτρο του συνόλου των σημείων τού $[0, 1]$ τα οποία έχουν δεκαδική παράσταση που περιέχει όλα τα ψηφία $1, 2, \ldots, 9$.

1.6.30 Έστω A το σύνολο των αριθμών τού $[0, 1]$ οι οποίοι έχουν δυαδικά αναπτύγματα με μηδενικά σε όλες τις άρτιες θέσεις. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

1.6.31 Έστω A η ένωση των διαστημάτων με κέντρο τα σημεία τού συνόλου τού Cantor και μήκος 0.1. Βρείτε το $m(A)$.

1.6.32 Να βρεθεί το μέτρο τού συνόλου

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2^n}, 3 + \frac{1}{3^n}\right].$$

1.6.33 Δείξτε ότι αν $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ και $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} = \varnothing$, τότε

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 1.2.6.

1.6.34* Δίνεται μετρήσιμο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ με $0 < m(E) < \infty$.
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = m(E \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subset E$ τέτοιο ώστε $m(F) = \frac{1}{3}m(E)$.
(γ) Δείξτε ότι υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset E$ τέτοιο ώστε $m(F) = \frac{1}{3}m(E)$.

1.6.35 Βρείτε μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων E_n τέτοια ώστε $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots,\ \bigcap_{n=1}^\infty E_n = \emptyset$ και $m(E_n) = \infty,\ \forall n$.

1.6.36 Αν E_n μετρήσιμο, $n = 1, 2, \dots$ και $\sum_{n=1}^\infty m(E_n) < \infty$, δείξτε ότι

$$m\left(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty E_k\right) = 0.$$

1.6.37 Έστω M_1 το σύνολο των μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$. Για $F, E \in M_1$, ορίζουμε $E \sim F$ αν $m(E \triangle F) = 0$. Δείξτε ότι η σχέση αυτή είναι ισοδυναμία. Για $F, E \in M_1$, ορίζουμε επίσης $d(E, F) = m(E \triangle F)$. Δείξτε ότι η d ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα

$$d(E, F) \le d(E, G) + d(G, F).$$

1.6.38 Το ανώτατο και το κατώτατο όριο μιάς ακολουθίας συνόλων $\{A_n\}$ ορίζονται θέτοντας

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty A_n, \qquad \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty A_n.$$

(α) Δείξτε ότι αν $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε

$$m\left(\liminf A_n\right) \le \liminf m(A_n).$$

(β) Δείξτε ότι, αν επιπλέον $m(A_n \cup A_{n+1} \cup \dots) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$m\left(\limsup A_n\right) \ge \limsup m(A_n).$$

1.6.39 Λέμε ότι μιά ακολουθία $\{A_n\}$ υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$ συγκλίνει αν $\limsup A_n = \liminf A_n$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\lim A_n = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

(α) Δείξτε ότι κάθε μονότονη ακολουθία συνόλων συγκλίνει.
(β) Δείξτε ότι αν
(i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{M}$,
(ii) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B$, όπου $m^*(B) < \infty$,
(iii) η ακολουθία $\{A_n\}$ συγκλίνει,
τότε

$$m\left(\lim A_n\right) = \lim m(A_n).$$

1.6.40 Δείξτε ότι αν $A \subset [a, b]$ και $m(A) > 0$, τότε υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.6.41 Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάζουμε ένα σύνολο C_α τύπου Cantor ως εξής: Στο πρώτο βήμα αφαιρούμε από το $[0, 1]$ ένα μεσαίο ανοικτό διάστημα μήκους $(1 - \alpha)\, 3^{-1}$. Στο n βήμα αφαιρούμε 2^{n-1} ανοικτά διαστήματα μήκους $(1 - \alpha)\, 3^{-n}$. Βρείτε το μέτρο Lebesgue του C_α.

1.6.42 Δείξτε ότι το σύνολο C_α της προηγούμενης άσκησης δεν περιέχει κανένα διάστημα (θετικού μήκους).

1.6.43 Δίνεται ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$. Δείξτε ότι

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \to \infty} m^*(E_n).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 1.2.6.

1.6.44 Για $E \subset \mathbb{R}$ φραγμένο, ορίζουμε

$$m_*(E) = \sup\{m^*(K) : K \text{ συμπαγές } \ K \subset E\}.$$

(α) Δείξτε ότι για κάθε φραγμένο υποσύνολο E τού $\mathbb{R}$ ισχύει $m_*(E) \leq m^*(E)$.
(β) Αν $E_1 \subset E_2$ φραγμένα, τότε $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.
(γ) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ φραγμένο. Δείξτε ότι $E \in \mathcal{M}$ αν κα μόνο αν $m^*(E) = m_*(E)$.

1.6.45 Έστω E φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$e^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} l(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \right\}.$$

(Τα I_i είναι *πεπερασμένου* πλήθους ανοικτά διαστήματα).
(α) Δείξτε ότι $m^*(E) \leq e^*(E)$.
(β) Δείξτε ότι $e^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$.

1.6.46 Για $a, b \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax + b,\ x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
(α) Για κάθε $E \subset \mathbb{R}$, $m^*(f(E)) = |a| m^*(E)$.
(β) Αν $E \in \mathcal{M}$, τότε $f(E) \in \mathcal{M}$.

1.6.47 Για $E \in \mathcal{M}$ και $x \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\rho(E, x) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{m(E \cap (x - \delta, x + \delta))}{2\delta},$$

αν το όριο υπάρχει. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *μετρική πυκνότητα* τού E στο x. Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.6.48 Έστω $E = (1,2) \cup (2,5] \cup \{6\}$. Βρείτε τη μετρική πυκνότητα τού E σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$.

1.6.49* Έστω $\alpha \in (0,1)$. κατασκευάστε σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\rho(E,0) = \alpha$.

1.6.50 Σωστό ή Λάθος;
Για ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει $m(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα τού A είναι μετρήσιμα.

1.6.51 Βρείτε αριθμήσιμου πλήθους ξένα σύνολα E_j τέτοια ώστε

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) < \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j).$$

1.6.52 Βρείτε αριθμήσιμου πλήθους σύνολα E_j τέτοια ώστε $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $m^*(E_1) < \infty$ και

$$m^*\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) < \lim_{j\to\infty} m^*(E_j).$$

1.6.53* Δίνονται σύνολο $E \in \mathcal{M}$ με $m(E) > 0$ και αριθμός α με $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) > \alpha l(I)$.
Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m^*(E) < \infty$. Μετά εις άτοπον απαγωγή.

1.6.54* (Steinhaus) Έστω E μετρήσιμο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.
Υπόδειξη: Από την προηγούμενη άσκηση, για $\alpha = 3/4$, βρείτε I. Αν $|x| < l(I)/2$, τότε $m(I \cup (I + x)) \leq 3l(I)/2$. Άρα $(E \cap I) \cap ((E \cap I) + x)) \neq \varnothing$.

1.6.55** Έστω E μετρήσιμο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το E περιέχει μιά τουλάχιστον αριθμητική πρόοδο μήκους n.

1.6.56** Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $A \subset [0,1]$ τέτοιο ώστε:
για κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $V \subset [0,1]$, ισχύει $0 < m(A \cap V) < m(V)$.

1.6.57 Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A τού $\mathbb{R}$ με $m^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

1.7 Σημειώσεις

Η θεωρία τού μέτρου Lebesgue αναπτύχθηκε από τον H.Lebesgue μεταξύ 1899 και 1902. Όλα τα θεωρήματα τού κεφαλαίου αυτού αποδείχθηκαν από το Lebesgue. Βασιζόμενοι κυρίως στα βιβλία [2], [5], [9] κάναμε μόνο μιά σύντομη και οικονομική εισαγωγή στο μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, χωρίς να αναφερθούμε σε σ-άλγεβρες και Borel σύνολα.

Το πρώτο μη μετρήσιμο σύνολο κατασκευάστηκε από τον G.Vitali το 1905. Η κατασκευή αυτή υπάρχει στα [2], [9], [7]. Βλ. επίσης το άρθρο [R.D.Mauldin, *The existence of non-measurable sets*, Amer. Math. Monthly, 86 (1979), 45-46]. Σημειώνουμε ότι για την κατασκευή μη μετρήσιμου συνόλου είναι απαραίτητο το Αξίωμα της Επιλογής.

Η αξία τού μέτρου Lebesgue καταδεικνύεται από τα ακόλουθα κλασικά θεωρήματα. Τα δύο πρώτα οφείλονται στο Lebesgue και το τρίτο στον P.Fatou.

Θεώρημα παραγώγισης τού Lebesgue: Δίνεται μονότονη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υπάρχει σύνολο $N \subset [a,b]$ με $m(N) = 0$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b] \setminus N$.

Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας τού Lebesgue: Μιά φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μέτρο ίσο με το 0.

Θεώρημα τού Fatou: Δίνεται μιγαδική συνάρτηση f που είναι φραγμένη και ολόμορφη στο μοναδιαίο δίσκο. Υπάρχει σύνολο $N \subset [0, 2\pi]$ με $m(N) = 0$ τέτοιο ώστε το όριο

$$\lim_{r \to 1-} f(re^{i\theta})$$

υπάρχει για κάθε $\theta \in [0, 2\pi] \setminus N$.

Απόδειξη του θεωρήματος παραγώγισης και τού κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας υπάρχει στα [2], [7], [9]. Το Θεώρημα τού Fatou είναι μιά σημαντική εφαρμογή τής Θεωρίας Μέτρου στη Μιγαδική Ανάλυση η οποία έγινε μάλιστα το 1906, μόλις λίγα χρόνια μετά την εμφάνιση τού μέτρου Lebesgue. Απόδειξή του μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [C.Caratheodory, *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2 vols., Chelsea 1983], και [W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1987].

Πριν το Lebesgue, οι G.Peano (1887) και C.Jordan (1892) ανέπτυξαν μιά θεωρία μέτρου χρησιμοποιώντας πεπερασμένα καλύμματα (βλ. Άσκηση 1.6.45). Η θεωρία αυτή, μετά τις θεαματικές επιτυχίες της θεωρίας τού Lebesgue, έχει σχεδόν εγκαταλειφθεί. Στοιχεία τής θεωρίας τού Jordan υπάρχουν στο [4].

Το μέτρο Lebesgue μπορεί να οριστεί με παρόμοιο τρόπο και στο επίπεδο, το χώρο, ή και σε ευκλείδειους χώρους ανώτερης διάστασης (βλ. για παράδειγμα [3]). Το πρόβλημα τού ορισμού τού μέτρου στον $\mathbb{R}^n$ έχει σχέση με το παράδοξο των Banach-Tarski. Αυτό λέει ότι μπορούμε να πάρουμε ένα ανοικτό σύνολο μεγέθους ενός πορτοκαλιού, να το χωρίσουμε σε πεπερασμένου πλήθους υποσύνολα και μετά να τα ξαναενώσουμε με άλλο τρόπο ώστε να κατασκευάσουμε ένα νέο ανοικτό σύνολο στο μέγεθος τής γής! Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [3, σελ. 20] και στο άρθρο [K.Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 151-161].

Ο ορισμός τού μετρήσιμου συνόλου που δώσαμε στην παράγραφο 1.3.1 οφείλεται στον Κ.Καραθεδωρή. Ο Lebesgue είχε αρχικά δώσει ένα άλλο (ισοδύναμο) ορισμό (βλ. Άσκηση 1.6.44).

Η Άσκηση 1.6.54 παρουσίαζει ένα θεώρημα που απέδειξε ο Steinhaus το 1920. Σχετικά θέματα υπάρχουν στα βιβλία [S.B.Chae, *Lebesgue Integration*, Marcel Dekker, 1980], [J.C.Oxtoby, *Measure and Category*, 2nd edition, Springer 1980] και στο άρθρο [Z.Kominek, *Measure, category, and the sums of sets*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 561-562].

Για θέματα σχετικά με την Άσκηση 1.6.56, παραπέμπουμε στο [7, σελ. 307] και στα άρθρα [A.Simoson, *An "archimedean paradox"*, Amer. Math. Monthly 89 (1982), 114-116, 125], [W.Rudin, *Well-distributed measurable sets*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 41-42].

Ιστορική ανασκόπηση της θεωρίας τού μέτρου Lebesgue υπάρχει στα βιβλία
[Γ.Κουμουλλής, Σ.Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Συμμετρία 1988],
[T.Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Developments*, 2nd edition, Chelsea 1975],
[E.W.Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable*, 2vols. Cambridge Univ. Press, 1927].

Κεφάλαιο 2

Μετρήσιμες συναρτήσεις

2.1 Ορισμός και στοιχειώδεις ιδιότητες

Ορισμός 2.1.1 Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά συνάρτηση με πεδίο ορισμού $E \in \mathcal{M}$. Η f ονομάζεται (Lebesgue) **μετρήσιμη**, αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ είναι μετρήσιμο.

Συμβολισμοί
Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μιά συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\{f > \alpha\} := f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}.$$

Παρομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\{f \geq \alpha\}$, $\{f < \alpha\}$, $\{f \leq \alpha\}$, $\{f = \alpha\}$ και άλλοι ανάλογοι συμβολισμοί.

Πρόταση 2.1.2 *Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά συνάρτηση με πεδίο ορισμού $E \in \mathcal{M}$. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*
(α) *Η f είναι μετρήσιμη.*
(β) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$.
(γ) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{f < \alpha\} \in \mathcal{M}$.
(δ) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \{f \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$.
Απόδειξη.
Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μετρήσιμη. Ισχύει

$$\{f \geq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ f > \alpha - \frac{1}{k} \right\},$$

το οποίο είναι μετρήσιμο σύνολο. Έτσι ισχύει το (β).
Το (β) συνεπάγεται το (γ) διότι

$$\{f < \alpha\} = E \setminus \{f \geq \alpha\}.$$

Το (γ) συνεπάγεται το (δ) διότι

$$\{f \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ f < \alpha + \frac{1}{k} \right\}.$$

Τέλος το (δ) συνεπάγεται το (α) διότι

$$\{f > \alpha\} = E \setminus \{f \leq \alpha\}.$$

□

Όπως έχουμε δεί κάθε σύνολο μέτρου μηδέν είναι μετρήσιμο. Επομένως αν $m(E) = 0$, τότε κάθε συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 2.1.3 *Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά συνάρτηση με πεδίο ορισμού $E \in \mathcal{M}$. Αν η f είναι συνεχής, τότε είναι και μετρήσιμη.*

Απόδειξη.
Για $\alpha \in \mathbb{R}$, το διάστημα (α, ∞) είναι ανοικτό σύνολο. Άρα το σύνολο $\{f > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού E (στη σχετική τοπολογία τού E). Άρα $\{f > \alpha\} = E \cap G$, όπου G ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε ότι το $\{f > \alpha\}$ είναι μετρήσιμο ως τομή μετρήσιμων συνόλων.

□

Πρόταση 2.1.4 *Δίνεται μιά συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $E = \cup_n E_n$, όπου τα E_n είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους, ξένα ανά δύο, μετρήσιμα σύνολα, και ότι για κάθε n, ο περιορισμός $g_n := f\,|_{E_n}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη.
Για $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\{f \leq \alpha\} = \bigcup_n \{g_n \leq \alpha\}.$$

Από την υπόθεση, τα σύνολα $\{g_n \leq \alpha\}$ είναι μετρήσιμα. Άρα και το σύνολο $\{f \leq \alpha\}$ είναι μετρήσιμο ως ένωση μετρήσιμων συνόλων. □

Πρόταση 2.1.5 *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο σύνολο E και μετρήσιμες, τότε τα σύνολα $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$ και $\{f = g\}$ είναι μετρήσιμα.*

Απόδειξη.
Το σύνολο $\{f < g\}$ είναι μετρήσιμο διότι

$$\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{f < r\} \cap \{g > r\} \right).$$

Για το ίδιο λόγο και το $\{g < f\}$ είναι μετρήσιμο. Το $\{f \leq g\}$ είναι μετρήσιμο διότι

$$\{f \leq g\} = E \setminus \{g < f\}.$$

Τέλος το $\{f = g\}$ είναι μετρήσιμο διότι

$$\{f = g\} = \{f \leq g\} \setminus \{f < g\}.$$

□

Λέμε ότι μιά ιδιότητα ισχύει **σχεδόν παντού** (*σ.π.*) στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ αν το σύνολο των σημείων τού E για τα οποία δεν ισχύει έχει μέτρο 0. Ονομάζουμε τις συναρτήσεις $f, g : E \to \mathbb{R}$ **ισοδύναμες** και γράφουμε $f \sim g$, αν οι f και g είναι *σ.π.* ίσες, δηλαδή αν $m(\{f \neq g\}) = 0$.

Πρόταση 2.1.6 *Αν η f είναι μετρήσιμη και η g είναι ισοδύναμη με την f, τότε η g είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη.
Έστω E το κοινό πεδίο ορισμού των f, g. Θέτουμε $A = \{f = g\}$. Από την υπόθεση $m(E \setminus A) = 0$. Ο περιορισμός $g\mid_A$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση διότι $g\mid_A = f\mid_A$ και η f είναι μετρήσιμη. Ο περιορισμός $g\mid_{E\setminus A}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση διότι $m(E \setminus A) = 0$. Από το Θεώρημα 2.1.4, η g είναι μετρήσιμη.
□

Παρατήρηση 2.1.7 Ας υποθέσουμε ότι μιά συνάρτηση f είναι ορισμένη και μετρήσιμη στο σύνολο $E \setminus A$, όπου $A \subset E$ με $m(A) = 0$. Όπως και να επεκτείνουμε την f στο E, η επέκταση θα είναι μετρήσιμη στο E. Για το λόγο αυτό, αν μιά συνάρτηση είναι μετρήσιμη και *σ.π.* ορισμένη σε ένα σύνολο E, θα λέμε ότι η f μετρήσιμη στο E.

Πρόταση 2.1.8 *Αν η f είναι μονότονη στο μετρήσιμο σύνολο E, τότε είναι μετρήσιμη στο E.*

Απόδειξη.
Έστω B το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Επειδή η f είναι μονότονη, το B είναι το πολύ αριθμήσιμο. Επομένως $m(B) = 0$ και συνεπώς η $f\mid_B$ είναι μετρήσιμη. Η $f\mid_{E\setminus B}$ είναι συνεχής· άρα και μετρήσιμη. Από το Θεώρημα 2.1.4, η f είναι μετρήσιμη. □

Θεώρημα 2.1.9 *Αν $c \in \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις f, g είναι μετρήσιμες στο E, τότε οι συναρτήσεις $cf, f + g, fg$ είναι μετρήσιμες στο E.*

Απόδειξη.
Για $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\{cf > \alpha\} = \begin{cases} \{f > \alpha/c\}, & \text{αν} \quad c > 0, \\ \{f < \alpha/c\}, & \text{αν} \quad c < 0, \\ E \quad \text{ή} \quad \varnothing, & \text{αν} \quad c = 0. \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση το σύνολο $\{cf > \alpha\}$ είναι μετρήσιμο.

Ισχύει

$$\begin{aligned} \{f + g > \alpha\} &= \{f > \alpha - g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{r > \alpha - g\}) \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > \alpha - r\}). \end{aligned}$$

Επομένως το σύνολο $\{f + g > \alpha\}$ είναι μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση μετρήσιμων συνόλων.

Για να αποδείξουμε ότι η fg είναι μετρήσιμη, θα χρειαστεί πρώτα να αποδείξουμε ότι η f^2 είναι μετρήσιμη:

$$\{f^2 > \alpha\} = \begin{cases} \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\}, & \text{αν} \quad \alpha \geq 0, \\ E, & \text{αν} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Άρα η f^2 είναι μετρήσιμη. Τέλος η fg είναι μετρήσιμη διότι

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

$\square$

2.2 Επεκτεταμένες πραγματικές συναρτήσεις

Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το σύνολο

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} = [-\infty, \infty].$$

Η διάταξη τού $\mathbb{R}$ επεκτείνεται στο $\overline{\mathbb{R}}$ θέτοντας $-\infty < x < \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επεκτεταμένα διαστήματα είναι σύνολα της μορφής $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $[a, \infty]$, $(a, \infty]$, $[-\infty, \infty]$ με $a \in \mathbb{R}$.

Η συνήθης τοπολογία τού $\mathbb{R}$ επεκτείνεται στο $\overline{\mathbb{R}}$ ως εξής: Ανοικτό σύνολο στο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι κάθε σύνολο της μορφής A, $A\cup(a,\infty]$, $A\cup[-\infty,b)$, $A\cup[-\infty,b)\cup(a,\infty]$, όπου A ανοικτό σύνολο τού $\mathbb{R}$ και $a,b\in\mathbb{R}$. Τα διαστήματα της μορφής $[-\infty,b)$ και $(a,\infty]$ είναι ανοικτές περιοχές των $-\infty$, ∞, αντιστοίχως.

Οι πράξεις τής πρόσθεσης και τού πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$ επεκτείνονται με το συνήθη τρόπο στο $\overline{\mathbb{R}}$ εκτός από τις ακόλουθες *μη επιτρεπτές* περιπτώσεις:

$$\infty-\infty,\ \ 0\cdot(\pm\infty),\ \ (\pm\infty)/0,\ \ (\pm\infty)/(\pm\infty).$$

Συναρτήσεις της μορφής $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$, όπου $E\subset\mathbb{R}$, ονομάζονται **επεκτεταμένες πραγματικές συναρτήσεις**.

Ορισμός 2.2.1 *Μιά επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ ονομάζεται μετρήσιμη αν για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, το σύνολο*

$$\{f>\alpha\}:=\{x\in E: f(x)>\alpha\}$$

είναι μετρήσιμο.

Όλες οι προτάσεις που αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο ισχύουν και για επεκτεταμένες συναρτήσεις με τις απαραίτητες τροποποιήσεις. Για παράδειγμα, αν οι $f,g:E\to\overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, τότε η $f+g$ ορίζεται και είναι μετρήσιμη στο σύνολο

$$E\setminus\left((\{f=\infty\}\cap\{g=-\infty\})\cup(\{f=-\infty\}\cap\{g=\infty\})\right).$$

Αν η $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε τα σύνολα $\{f=\infty\}$, $\{f=-\infty\}$, $\{-\infty<f<\infty\}$ είναι μετρήσιμα. Αυτό προκύπτει άμεσα από τις ισότητες

$$\{f=\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f>n\},\qquad \{f=-\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f<-n\}$$
$$\{-\infty<f<\infty\}=E\setminus(\{f=\infty\}\cup\{f=-\infty\}).$$

Μιά επεκτεταμέμη συνάρτηση f είναι *σ.π. πεπερασμένη* αν $m(\{f=\pm\infty\})=0$.

2.3 Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Αν $\{f_n\}$ είναι μιά (φραγμένη ή μη φραγμένη) ακολουθία (επεκτεταμένων) πραγματικών συναρτήσεων, οι συναρτήσεις $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf_n f_n$ ορίζονται ως επεκτεταμένες πραγματικές συναρτήσεις.

Πρόταση 2.3.1 *Αν $\{f_n\}$ είναι μιά ακολουθία επεκτεταμένων πραγματικών συναρτήσεων που είναι όλες μετρήσιμες στο E, τότε και οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες στο E.*

Απόδειξη.
Για $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\{\sup_n f_n > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > \alpha\}.$$

Άρα η $\sup_n f_n$ είναι μετρήσιμη. Η απόδειξη για την $\inf_n f_n$ είναι παρόμοια. □

Πρόταση 2.3.2 *Αν $\{f_n\}$ είναι μιά ακολουθία επεκτεταμένων πραγματικών συναρτήσεων που είναι όλες μετρήσιμες στο E, τότε και οι συναρτήσεις $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ είναι μετρήσιμες στο E.*

Απόδειξη.
Είναι γνωστό ότι

$$\limsup f_n(x) = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k(x), \quad x \in E.$$

Εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα 2.3.1 συμπεραίνουμε ότι η $\limsup f_n$ είναι μετρήσιμη. Η απόδειξη για την $\liminf f_n$ είναι παρόμοια. □

Ορισμός 2.3.3 *Λέμε ότι μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει σ.π. στο E προς τη συνάρτηση f, αν υπάρχει σύνολο $A \subset E$ τέτοιο ώστε $m(A) = 0$ και η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά προς την f στο σύνολο $E \setminus A$.*

Πρόταση 2.3.4 *Έστω $\{f_n\}$ είναι μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων που είναι όλες μετρήσιμες στο E. Αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει σ.π. στο E προς τη συνάρτηση f, τότε η f είναι μετρήσιμη στο E.*

Απόδειξη.
Υπάρχει $A \subset E$ τέτοιο ώστε $m(A) = 0$ και $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $E \setminus A$. Από την Πρόταση 2.3.2 προκύπτει άμεσα ότι η f είναι μετρήσιμη στο $E \setminus A$, άρα και στο E· βλ. Παρατήρηση 2.1.7. □

2.4 $*$ Θεωρήματα τών Egorov και Luzin

Έχουμε δεί ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων είναι ισχυρότερη από τη σημειακή σύγκλιση. Έχουμε επίσης δεί παραδείγματα ακολουθιών που συγκλίνουν σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα. Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι η σημειακή σύγκλιση σε ένα σύνολο πεπερασμένου μέτρου συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση σε ένα λίγο μικρότερο σύνολο.

Θεώρημα 2.4.1 (Egorov) *Έστω* E *ένα μετρήσιμο σύνολο με* $m(E) < \infty$. *Έστω* $\{f_n\}$ *μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων, μετρήσιμων στο* E. *Υποθέτουμε ότι η* $\{f_n\}$ *συγκλίνει σημειακά στο* E *προς τη συνάρτηση* f. *Τότε γιά κάθε* $\varepsilon > 0$, *υπάρχει μετρήσιμο σύνολο* $A \subset E$ *τέτοιο ώστε* $m(A) < \varepsilon$ *και* $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ *στο* $E \setminus A$.

Απόδειξη.

Για $k, n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$B_{k,n} = \bigcup_{j=n}^{\infty} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq 1/k\}.$$

Όλα τα σύνολα αυτά είναι μετρήσιμα και ισχύει

$$B_{k,1} \supset B_{k,2} \supset \dots$$

Επίσης, επειδή $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{k,n} = \varnothing.$$

Επειδή επιπλέον $m(E) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \to \infty} m(B_{k,n}) = 0, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, αν $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε n_k τέτοιο ώστε

$$m(B_{k,n_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Θέτουμε

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k,n_k}.$$

Τότε

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_{k,n_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Επίσης

$$E \setminus A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=n_k}^{\infty} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < 1/k\}.$$

Άρα για δοθέν $k \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$j \geq n_k \Rightarrow \forall x \in E \setminus A, \ |f_j(x) - f(x)| < 1/k.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f_j \xrightarrow{o\mu} f$ στο $E \setminus A$. $\square$

Παράδειγμα 2.4.2 Έστω $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Είναι φανερό ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς τη μηδενική συνάρτηση f. Αν ισχύει το συμπέρασμα του Θεώρήματος Egorov, τότε για $\varepsilon = 1$ υπάρχει σύνολο A με $m(A) < 1$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $\mathbb{R} \setminus A$. Όμως αν $m(A) < 1$, τότε το $\mathbb{R} \setminus A$ τέμνει κάθε διάστημα $[n, n+1]$ και συνεπώς

$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus A} \chi_{[n,n+1]}(x) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R} \setminus A$. Άτοπο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο Θεώρημα Egorov, η υπόθεση $m(E) < \infty$ δεν μπορεί να απαληφθεί.

Παράδειγμα 2.4.3 Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι στο Θεώρημα Egorov δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση $m(A) < \varepsilon$ με την υπόθεση $m(A) = 0$.
Έστω

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $E = [0,1]$ προς τη μηδενική συνάρτηση. Αν A είναι ένα υποσύνολο τού E με $m(A) = 0$, τότε $m(E \setminus A) = 1$ και άρα το $E \setminus A$ είναι πυκνό μέσα στο E. Συνεπώς

$$\sup_{x \in E \setminus A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in E \setminus A} x^n = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $E \setminus A$.

Θεώρημα 2.4.4 (Luzin, πρώτη μορφή) *Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση. Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F_\varepsilon \subset E$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και ο περιορισμός $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής στο F_ε.*

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο όλων των ανοικτών διαστημάτων τής μορφής (q, r) με $q, r \in \mathbb{Q}$. Το σύνολο αυτό είναι αριθμήσιμο. Έστω $I_1, I_2, \dots$ μιά αρίθμησή του. Επειδή η f είναι μετρήσιμη, καθένα από τα σύνολα $f^{-1}(I_j)$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο τού E. Χάρη στο Θεώρημα 1.4.4 υπάρχουν κλειστό σύνολο K_j και ανοικτό σύνολο A_j τέτοια ώστε

$$K_j \subset f^{-1}(I_j) \subset A_j \quad \text{και} \quad m(A_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{2.1}$$

Θέτουμε $G_\varepsilon = \cup_{j=1}^{\infty}(A_j \setminus K_j)$ και $F_\varepsilon = E \setminus G_\varepsilon$. Από την (2.1) προκύπτει ότι $m(G_\varepsilon) < \varepsilon$ και ότι

$$K_j \cap F_\varepsilon \subset f^{-1}(I_j) \cap F_\varepsilon \subset A_j \cap F_\varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Ισχύουν και οι αντίστροφοι εγκλεισμοί διότι

$$\begin{aligned} x \in A_j \cap F_\varepsilon &\Rightarrow (x \in A_j,\ x \in F_\varepsilon) \Rightarrow (x \in A_j,\ x \in F_\varepsilon,\ x \notin G_\varepsilon) \\ &\Rightarrow (x \in A_j,\ x \in F_\varepsilon,\ x \notin A_j \setminus K_j) \\ &\Rightarrow (x \in K_j,\ x \in F_\varepsilon) \Rightarrow x \in K_j \cap F_\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα $K_j \cap F_\varepsilon = f^{-1}(I_j) \cap F_\varepsilon = A_j \cap F_\varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $g = f|_{F_\varepsilon}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g^{-1}(I_j) &= \{x \in F_\varepsilon : g(x) \in I_j\} = \{x \in F_\varepsilon : f(x) \in I_j\} \\ &= \{x \in E : f(x) \in I_j\} \cap F_\varepsilon \\ &= f^{-1}(I_j) \cap F_\varepsilon = A_j \cap F_\varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το σύνολο $g^{-1}(I_j)$ είναι ανοικτό στο F_ε (στη σχετική τοπολογία τού F_ε). Κάθε ανοικτό σύνολο τού $\mathbb{R}$ γράφεται σαν ένωση ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα. Επομένως για κάθε ανοικτό σύνολο U, το σύνολο $g^{-1}(U)$ είναι ανοικτό σύνολο στο F_ε. Αυτό σημαίνει ότι η g είναι συνεχής στο F_ε. □

Θεώρημα 2.4.5 (Luzin, δεύτερη μορφή) *Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση με $m(E) < \infty$. Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει συμπαγές σύνολο $L \subset E$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus L) < \varepsilon$ και ο περιορισμός $f|_L$ είναι συνεχής στο L.*

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Από την πρώτη μορφή τού Θεωρήματος Luzin, υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subset E$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus F) < \varepsilon/4$ και η $f\,|_F$ είναι συνεχής. Θωρούμε (βλ. Θεώρημα 1.4.4) κλειστό σύνολο $K \subset F$ με $m(F \setminus K) < \varepsilon/4$. Επειδή $E \setminus K \subset (E \setminus F) \cup (F \setminus K)$, ισχύει

$$m(E \setminus K) \leq m(E \setminus F) + m(F \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $K_n = K \cap [-n, n]$, $n = 1, 2, \ldots$ και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n \to \infty} m(E \setminus K_n) = m(E \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα για έναν αρκετά μεγάλο φυσικό n_o, ισχύει $m(E \setminus K_{n_o}) < \varepsilon$. Θέτουμε $L = K_{n_o}$ και παρατηρούμε ότι το L είναι συμπαγές υποσύνολο τού E, $m(E \setminus L) < \varepsilon$ και η $f\,|_L$ είναι συνεχής. □

Θεώρημα 2.4.6 (Luzin, τρίτη μορφή) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) = 0$ αν $x \notin E$ όπου $E \in \mathcal{M}$ και $m(E) < \infty$. Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}$ και συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:*
(α) $g(x) = 0$ *αν* $x \notin K$.
(β) $m(\{f \neq g\}) < \varepsilon$.
(γ) $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη δεύτερη μορφή τού Θεωρήματος Luzin, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο L τού E τέτοιο ώστε $m(E \setminus L) < \varepsilon/2$ και η $f\,|_L$ είναι συνεχής. Θεωρούμε ανοικτό σύνολο $U \supset L$ με $m(U \setminus L) < \varepsilon/2$. Επειδή το L είναι φραγμένο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και το U είναι φραγμένο.

Το σύνολο $U \setminus L$ είναι ανοικτό και φραγμένο. Άρα είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$. Θέτουμε $I_j = (a_j, b_j)$. Ορίζουμε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής:
1. Αν $x \in L$, θέτουμε $g(x) = f(x)$.
2. Αν $x \notin U$, ορίζουμε $g(x) = 0$.
3. Αν $a_j \notin L$, θέτουμε $g(a_j) = 0$. Αν $a_j \in L$, θέτουμε $g(a_j) = f(a_j)$. Παρομοίως για τα b_j.
4. Τέλος σε καθένα I_j, η g είναι εξ ορισμού η αφινική συνάρτηση με τιμές στα άκρα τού I_j αυτές που ορίστηκαν παραπάνω.

Θέτουμε $\overline{U} = K$ και παρατηρούμε ότι το K είναι συμπαγές και η g ικανοποιεί τα (α), (γ) τού θεωρήματος. Το (β) ισχύει διότι

$$\{f \neq g\} \subset (E \cup U) \setminus L = (E \setminus L) \cup (U \setminus L)$$

κι επομένως

$$m(\{f \neq g\}) \leq m(E \setminus L) + m(U \setminus L) < \varepsilon.$$

□

2.5 Απλές συναρτήσεις

Μιά συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **απλή** αν είναι μετρήσιμη και το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο. Έστω ϕ μιά απλή συνάρτηση με σύνολο τιμών $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Τα σύνολα $A_i := \{\phi = a_i\}$, $i = 1, , 2, \ldots, n$, είναι μη κενά, μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Η ϕ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

Είναι δηλαδή πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων. Η παραπάνω παράσταση της ϕ (με a_i διαφορετικά ανά δύο και A_i ξένα ανά δύο) ονομάζεται **κανονική παράσταση** τής ϕ. Μιά απλή συνάρτηση μπορεί να γραφεί και με άλλους (άπειρους) τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \infty), \\ -3, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

έχει τις παραστάσεις

$$\phi = 2\chi_{[0,\infty)} - 3\chi_{(-\infty,0)} = 2\chi_{\mathbb{R}} - 5\chi_{(-\infty,0)}.$$

Η πρώτη από αυτές είναι η κανονική παράσταση της ϕ.

Το ακόλουθο θεώρημα λέει ότι κάθε θετική μετρήσιμη συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από μιά αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων. Η προσέγγιση αυτή είναι χρήσιμη στη θεωρία τού ολοκληρώματος Lebesgue.

Θεώρημα 2.5.1 *Δίνεται μιά μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to [0, \infty]$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε $\phi_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E.*

Απόδειξη.
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Οι τιμές της f είναι στο $[0, \infty]$. Διαμερίζουμε το διαστημα αυτό στα $2^{2n} + 1$ διαστήματα

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, 2^{2n} - 1, \quad \text{και} \quad [2^n, \infty].$$

Η διαμέριση αυτή τού πεδίου τιμών οδηγεί μέσω της f σε μιά διαμέριση τού πεδίου ορισμού E: Θέτουμε

$$E_{n,k} = \left\{\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \ k = 0, 1, \ldots, 2^{2n} - 1, \quad \text{και} \quad B_n = \{f \ge 2^n\}.$$

Έπειδή η f είναι μετρήσιμη, τα σύνολα αυτά είναι μετρήσιμα. Ορίζουμε

$$\phi_n = 2^n \chi_{B_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μετρήσιμη και μάλιστα απλή. Έτσι κατασκευάσαμε μιά ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$.

Θα δείξουμε ότι $\phi_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E. Έστω $x \in E$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
1. $f(x) < \infty$. Διαλέγουμε $n_o = n_o(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f(x) < 2^n$, $\forall n \geq n_o$. Επόμένως $\forall n \geq n_o$, το x ανήκει στο $E_{n,k}$ για ακριβώς ένα k. Άρα $\phi_n(x) = k/2^n$ και $k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n$. Συνεπώς

$$0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}, \ \ \forall n \geq n_o. \tag{2.3}$$

Η (2.3) συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$.
2. $f(x) = \infty$. Τότε $f(x) > 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $x \in B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty = f(x).$$

Έτσι η σημειακή σύγκλιση αποδείχθηκε.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $\{\phi_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων. Για $x \in E$ και $n \in \mathbb{N}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
A: $f(x) \geq 2^n$. Τότε $x \in B_n$. Άρα $\phi_n(x) = 2^n = 2^{2n+1}/2^{n+1} \leq \phi_{n+1}(x)$.
B: $f(x) < 2^n$. Τότε $x \in E_{n,k}$ για κάποιο k. Όμως

$$E_{n,k} = \left\{ \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f < \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right\} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1}.$$

Αν $x \in E_{n+1,2k}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n = 2k/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$.
Αν $x \in E_{n+1,2k+1}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n < (2k+1)/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$.
Σε κάθε περίπτωση λοιπόν $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$. □

2.6 Ασκήσεις

2.6.1 Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η χ_E είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $E \in \mathcal{M}$.

2.6.2 Δίνεται συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η f είναι μετρήσιμη, τότε $\{f = \alpha\} \in \mathcal{M}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.6.3 Δίνεται συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $\{a < f < b\} \in \mathcal{M}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

2.6.4 Αν η f είναι μετρήσιμη στο E και το E_1 είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E, τότε ο περιορισμός $f\,|_{E_1}$ της f στο E_1 είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο E_1.

2.6.5 Σωστό ή Λάθος;
Αν η f είναι μονότονη στο σύνολο E, τότε είναι μετρήσιμη στο E.

2.6.6 Δείξτε ότι αν η $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, είναι σ.π. συνεχής στο E, τότε η f είναι μετρήσιμη στο E.

2.6.7 Αν οι f, g είναι μετρήσιμες στο E, τότε και οι συναρτήσεις $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f^+, f^-, $|f|$ είναι μετρήσιμες στο E.

2.6.8 Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρήσιμες στο πεδίο ορισμού τους.
$f_1(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x),\ x \in \mathbb{R}$,
$f_2(x) = [x],\ x \in \mathbb{R}$ (ακέραιο μέρος),
$f_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $f_3(x) = x^2$ αν $x \in [0, \pi]$ και $f_3(x) = \cos x$ αν $x \in (\pi, 2\pi]$.

2.6.9 Δίνεται συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\{f > \alpha\} \in \mathcal{M}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

2.6.10 Δίνεται συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι μετρήσιμη στο $[a, b]$ για κάθε a, b με $0 < a < b < \infty$, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη στο $[0, \infty)$.

2.6.11 Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι μετρήσιμες στο E, τότε η συνάρτηση f/g είναι μετρήσιμη στο σύνολο $E \setminus \{x \in E : g(x) \neq 0\}$.

2.6.12 Δείξτε ότι κάθε τμηματικά μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

2.6.13 Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $g : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι η $f \circ g$ είναι μετρήσιμη στο E.

2.6.14 Δίνεται μετρήσιμη και σ.π. πεπερασμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $m(\{|f| > M\}) < \varepsilon$.

2.6.15 Δίνεται συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ με $E \in \mathcal{M}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη στο E αν και μόνο αν η g είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$.

2.6.16 Δίνεται μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Έστω E_1 ένα μετρήσιμο υποσύνολο τού E. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_1, \\ 0, & x \in E \setminus E_1. \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

2.6.17 Έστω N ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο τού $(0, 1)$. Για τη συνάρτηση $f(x) = x\,\chi_N(x)$, δείξτε ότι δεν είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$, αλλά καθένα από τα σύνολα $\{f = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι μετρήσιμο.

2.6.18 Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά συνάρτηση με πεδίο ορισμού $E \in \mathcal{M}$. Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$, το σύνολο $f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο.
Υπόδειξη: Κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων.

2.6.19 Δίνεται ένα μετρήσιμο σύνολο E. Δείξτε ότι η σχέση $f \sim g$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το E.

2.6.20 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν η f είναι μετρήσιμη στο $(a, b-\varepsilon)$ για κάθε αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a, b).
(β) Δίνονται μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε συνάρτηση g θέτοντας $g(x) = f(x + c)$. Η g είναι μετρήσιμη στο $E - c$.

2.6.21 Αν η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι μετρήσιμη στο E.

2.6.22 Δείξτε ότι αν η f είναι μετρήσιμη και η g είναι ισοδύναμη με την f, τότε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$m(\{g > \alpha\}) = m(\{f > \alpha\}).$$

2.6.23 Δείξτε ότι αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο $[a, b]$.

2.6.24 Δίνεται συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $E \in \mathcal{M}$ και $\{f > \alpha\} \in \mathcal{M}$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$.

2.6.25 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $f \sim g$ στο E και η g είναι συνεχής στο E, τότε η f είναι σ.π. συνεχής στο E.
(β) Αν $f \sim g$ στο E, η g είναι συνεχής στο E και η f είναι σ.π. συνεχής στο E, τότε f είναι συνεχής στο E.

2.6.26 Βρείτε μιά μονότονη συνάρτηση που δεν είναι μετρήσιμη.

2.6.27 Βρείτε συνάρτηση f που δεν είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ ενώ η $|f|$ είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$.

2.6.28 Δίνεται συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η $|f|$ είναι μετρήσιμη στο E και το σύνολο $\{f > 0\}$ είναι μετρήσιμο, τότε η f είναι μετρήσιμη στο E.

2.6.29 Δείξτε ότι το γινόμενο και κάθε γραμμικός συνδυασμός απλών συναρτήσεων είναι απλή συνάρτηση.

2.6.30 Αποδείξτε τις ισότητες

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A.$$

2.6.31 Δίνεται μιά μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.
(α) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε $0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f|$ και $\phi_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E.
(β) Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη στο $F \subset E$, τότε υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε $0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f|$ και $\phi_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο F.

2.6.32 Δείξτε ότι αν η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη στο F, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε $\phi_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο F.

2.6.33 Γιά μιά ακολουθία $\{\phi_n\}$ απλών συναρτήσεων ισχύει $\phi_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

2.6.34 Βρείτε μιά αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων που να συγκλίνει σημειακά στο $[0, 1]$ προς τη συνάρτηση $f(x) = x$.

2.6.35 Δίνεται μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : \lim f_n(x) \text{ υπάρχει}\}$ είναι μετρήσιμο.

2.6.36 Δείξτε ότι αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη στο (a, b).
Υπόδειξη: $\frac{f(x\pm 1/n)-f(x)}{1/n} \to f'(x)$.

2.6.37 Κατασκευάστε μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0, 1]$ η οποία να συγκλίνει σημειακά στο $[0, 1]$ και να μην συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα σύνολο $E \subset [0, 1]$ με $m(E) = 1$.

2.6.38* Έστω $\{f_n\}$ μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο σύνολο E. Λέμε ότι η $\{f_n\}$ **συγκλίνει κατά μέτρο** σε μιά μετρήσιμη συνάρτηση f και γράφουμε $f_n \xrightarrow{\kappa\mu} f$ αν

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Δείξτε ότι:
(α) Αν $f_n \xrightarrow{\kappa\mu} f$ και $f_n \xrightarrow{\kappa\mu} g$, τότε $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο E.
(β) Αν $m(E) < \infty$ και $f_n \to f$ $\sigma.\pi.$ στο E, τότε $f_n \xrightarrow{\kappa\mu} f$.

2.6.39* Κατασκευάστε μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0, 1]$ η οποία να συγκλίνει κατά μέτρο και να μη συγκλίνει σε κανένα σημείο τού $[0, 1]$.

2.6.40* Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(α) $\forall E \subset [a, b],\ \ m(E) = 0 \Rightarrow m(f(E)) = 0$.
(β) $\forall E \subset [a, b],\ \ E \in \mathcal{M} \Rightarrow f(E) \in \mathcal{M}$.

2.6.41* Δίνεται μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f έχει περιόδους s και t, και ο αριθμός $\frac{s}{t}$ είναι άρρητος, δείξτε ότι η f είναι $\sigma.\pi.$ σταθερή.

2.6.42 Δείξτε ότι αν μιά συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, τότε είναι μετρήσιμη.
Υπόδειξη: Δείτε το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας τού Lebesgue στην §1.7.

2.6.43 Αποδείξτε το Θεώρημα τού Egorov με την ασθενέστερη υπόθεση ότι $f_n \to f$ σ.π. στο E.

2.6.44 Δείξτε ότι στο Θεώρημα τού Egorov μπορούμε να πετύχουμε το σύνολο $E \setminus A$ να είναι συμπαγές.

2.6.45 Μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει *σχεδόν ομοιόμορφα* στο E προς τη συνάρτηση f, δηλαδή η $\{f_n\}$ έχει την ιδιότητα: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο A τού E τέτοιο ώστε $m(A) < \varepsilon$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $E \setminus A$.
Δείξτε ότι $f_n \to f$ σ.π. στο E.
Υπόδειξη: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει A_k με $m(A_k) < 1/k$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $E \setminus A_k$.

2.6.46 Για μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων f_n, ψποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ σε ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E$ τέτοια ώστε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E_k και $m\left(E \setminus \cup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$.

2.7 Σημειώσεις

Και στο κεφάλαιο αυτό διατηρήσαμε τον εισαγωγικό χαρακτήρα τού βιβλίου και παρουσιάσαμε μόνο τις βασικές ιδιότητες των μετρήσιμων συναρτήσεων. Περισσότερα για τις μετρήσιμες συναρτήσεις υπάρχουν στα βιβλία [2], [7], [9].

Για τη σχέση μετρησιμότητας και συνέχειας συναρτήσεων, βλ. [A.C. Zaanen, *Continuity of measurable functions*, Amer. Math. Monthly 93 (1986), 128-130].

Η απόδειξη τού Θεωρήματος τού Luzin που παρουσιάσαμε προέρχεται από το άρθρο [M. B. Feldman, *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly 88 (1981), 191-192]. Άλλες αποδείξεις υπάρχουν στα [3], [7], [10]. Σχετικό με το Θεώρημα τού Egorov είναι το άρθρο [R.G. Bartle, *An extension of Egorov's theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 628-633].

Ο Luzin ήταν μαθητής τού Egorov στη Μόσχα. Για την ιστορία τους, βλ. [A.Shields, *Luzin and Egorov*, The Mathematical Intelligencer 9 (1987), 24-27] και [A.Shields, *Luzin and Egorov, II*, The Mathematical Intelligencer 11 (1989), 5-8].

Κεφάλαιο 3

Το ολοκλήρωμα Lebesgue

3.1 Το ολοκλήρωμα γιά θετικές απλές συναρτήσεις

Θα λέμε ότι μιά συνάρτηση f είναι θετική αν $f \geq 0$.

Ορισμός 3.1.1 Έστω ϕ μιά θετική, απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}.$$

Το ολοκλήρωμα (Lebesgue) τής ϕ είναι ο επεκτεταμένος πραγματικός αριθμός

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \, m(A_j)$$

(με τη σύμβαση ότι $0 \cdot \infty = 0$). Αν $\int_{\mathbb{R}} \phi < \infty$, λέμε ότι η ϕ είναι ολοκληρώσιμη (κατά Lebesgue) και γράφουμε $\phi \in L^1$.

Σημειώνουμε ότι αν ϕ είναι μιά θετική, απλή συνάρτηση και $E \in \mathcal{M}$, τότε η συνάρτηση $\phi\chi_E$ είναι θετική και απλή. Με βάση αυτή την παρατήρηση δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.1.2 Αν ϕ είναι μιά θετική, απλή συνάρτηση και $E \in \mathcal{M}$, ορίζουμε

$$\int_E \phi = \int_{\mathbb{R}} \phi\chi_E.$$

Αν $\int_E \phi < \infty$, λέμε ότι η ϕ είναι ολοκληρώσιμη στο E και γράφουμε $\phi \in L^1(E)$.

Παράδειγμα 3.1.3 $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} = 1 \cdot m(\mathbb{Q}) = 0$.

Παράδειγμα 3.1.4

$$\int_{[0,3]} (2\chi_{[0,1]} + 3\chi_{(1,4]\setminus\mathbb{Q}}) = \int_{\mathbb{R}} (2\chi_{[0,1]} + 3\chi_{(1,3]\setminus\mathbb{Q}}) = 2 + 6 = 8.$$

Παράδειγμα 3.1.5 Αν $c > 0$, τότε $\int_{\mathbb{R}} c = \int_{\mathbb{R}} c\chi_{\mathbb{R}} = c\, m(\mathbb{R}) = \infty$.

Λήμμα 3.1.6 *Αν ϕ είναι μιά θετική, απλή, ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\phi = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{E_i}$ μιά παράστασή της με $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ξένα ανά δύο, μετρήσιμα σύνολα, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \sum_{i=1}^{m} b_i\, m(E_i). \tag{3.1}$$

Απόδειξη.
Αν τα b_i είναι διαφορετικά ανά δύο, τότε η $\sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{E_i}$ είναι η κανονική παράσταση τής ϕ και η (3.1) προκύπτει άμεσα από τον ορισμό τού ολοκληρώματος. Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα b_i δεν είναι διαφορετικά ανά δύο. Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ το σύνολο τιμών τής ϕ. Για $j = 1, 2, \ldots, n$, θέτουμε $I_j = \{i : b_i = a_j\}$. Ισχύει

$$m(\{\phi = a_j\}) = \sum_{i \in I_j} m(E_i)$$

κι επομένως

$$a_j\, m(\{\phi = a_j\}) = \sum_{i \in I_j} b_i m(E_i).$$

Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \sum_{j=1}^{n} a_j m(\{\phi = a_j\}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} b_i m(E_i) = \sum_{i=1}^{m} b_i m(E_i).$$

□

Λήμμα 3.1.7 *Αν ϕ, ψ είναι θετικές, απλές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $c_1, c_2 \geq 0$, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} (c_1\phi + c_2\psi) = c_1 \int_{\mathbb{R}} \phi + c_2 \int_{\mathbb{R}} \psi.$$

Απόδειξη.

Γράφουμε τις κανονικές παράστασεις των ϕ, ψ:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \qquad \psi = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{B_j}.$$

Επειδή οι ϕ, ψ είναι ολοκληρώσιμες, μιά από τις τιμές τους είναι το 0 και μάλιστα

$$m(\{\phi \neq 0\}) < \infty, \qquad m(\{\psi \neq 0\}) < \infty.$$

Έστω ότι $a_1 = b_1 = 0$. Τα σύνολα A_i, B_j είναι ξένα ανά δύο και έχουν όλα πεπερασμένο μέτρο εκτός από τα A_1, B_1. Ισχύει

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{k} B_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k} (A_i \cap B_j).$$

Συνεπώς

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_i \chi_{A_i \cap B_j}, \qquad \phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Άρα

$$c_1\phi + c_2\psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (c_1 a_i + c_2 b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Εφαρμόζοντας τρείς φορές το Λήμμα 3.1.6 προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (c_1\phi + c_2\psi) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (c_1 a_i + c_2 b_j)\, m(A_i \cap B_j) \\
&= c_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_i m(A_i \cap B_j) + c_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} b_j m(A_i \cap B_j) \\
&= c_1 \int_{\mathbb{R}} \phi + c_2 \int_{\mathbb{R}} \psi.
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.1.8 *Αν ϕ, ψ είναι θετικές, απλές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\phi \leq \psi$, τότε $\int_{\mathbb{R}} \phi \leq \int_{\mathbb{R}} \psi$.*

Απόδειξη.
Η $\psi - \phi$ είναι θετική, απλή και ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \psi = \int_{\mathbb{R}} \phi + \int_{\mathbb{R}} (\psi - \phi) \geq \int_{\mathbb{R}} \phi.$$

Πόρισμα 3.1.9 *Αν* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0, \infty)$ *και* $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ *με* $m(E_i) < \infty, \; i = 1, 2, \ldots, n$*, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i).$$

3.2 Το ολοκλήρωμα για θετικές συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1 Αν η $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ είναι μιά μετρήσιμη συνάρτηση, το **ολοκλήρωμα** (Lebesgue) της f στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$\int_{\mathbb{R}} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi : 0 \leq \phi \leq f, \;\; \phi \;\; \text{απλή και} \;\; \phi \in L^1 \right\}.$$

Αν $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$, λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** (κατά Lebesgue) στο $\mathbb{R}$ και γράφουμε $f \in L^1$.

Ορισμός 3.2.2 Αν $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ είναι μιά μετρήσιμη συνάρτηση και E είναι ένα μετρήσιμο σύνολο, ορίζουμε $\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f \chi_E$. Αν $\int_E f < \infty$, λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** (κατά Lebesgue) στο E και γράφουμε $f \in L^1(E)$.

Παρατηρήσεις

1. Έστω $f : E \to [0, \infty]$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση. Για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_E f$, επεκτείνουμε πρώτα την f στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $f = 0$ για $x \notin E$ και στη συνέχεια ορίζουμε $\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f$. Από τούς ορισμούς είναι προφανές ότι $\int_E f \geq 0$.

2. Για θετικές, απλές συναρτήσεις, οι ορισμοί 3.1.1 και 3.2.1 είναι συμβατοί.

3. Αν $m(E) = 0$, τότε $\int_E f = 0$. Πράγματι, αν ϕ είναι μια θετική, απλή, ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leq \phi \leq f \chi_E$, τότε $\phi = 0$ σ.π.. Άρα $\int_E \phi = 0$.

4. Από τούς ορισμούς προκύπτει άμεσα ότι αν f, g είναι μετρήσιμες, θετικές

συναρτήσεις, ορισμένες στο E, και $f \leq g$, τότε $\int_E f \leq \int_E g$. Επίσης $\int_E cf = c\int_E f$, όπου c θετική σταθερά.

5. Αν $E \subset F$, τότε $\int_E f \leq \int_F f$, διότι $f\chi_E \leq f\chi_F$.

Παράδειγμα 3.2.3 Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{[1,\infty)} f$, όπου $f(x) = \frac{1}{x}$. Θεωρούμε την ακολουθία των απλών συναρτήσεων

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \chi_{[2^k, 2^{k+1})}.$$

Ισχύει $0 \leq \phi_n \leq f$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}(2^{k+1} - 2^k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Άρα $\phi_n \in L^1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{[1,\infty)} f &= \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi : 0 \leq \phi \leq f, \ \ \phi \ \ \text{απλή και} \ \ \phi \in L^1 \right\} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.2.4 (**Ανισότητα Chebyshev**) *Αν η $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ είναι μιά μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\forall \alpha \geq 0, \ \ \alpha m(\{f \geq \alpha\}) \leq \int_{\mathbb{R}} f.$$

Απόδειξη.
Από την προφανή ανισότητα $f \geq \alpha\chi_{\{f\geq\alpha\}}$ και την Παρατήρηση 4 έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{\mathbb{R}} \alpha\chi_{\{f\geq\alpha\}} = \alpha m(\{f \geq \alpha\}).$$

$\square$

Πρόταση 3.2.5 *Αν η $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι σ.π. πεπερασμένη.*

Απόδειξη.
Ισχύει $\{f = \infty\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{f \geq n\}$. Η ανισότητα Chebyshev δίνει για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$m(\{f \geq n\} \leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} f.$$

Επειδή $f \in L^1$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} m(\{f \geq n\}) = 0$. Η ακολουθία των συνόλων $\{f \geq n\}$ είναι φθίνουσα. Άρα

$$m(\{f = \infty\}) = \lim_{n\to\infty} m(\{f \geq n\}) = 0.$$

□

Λήμμα 3.2.6 *Έστω ϕ μιά θετική, απλή και ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ μετρήσιμα και $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε*

$$\int_E \phi = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi.$$

Απόδειξη.
Έστω

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$$

η κανονική παράσταση της ϕ. Για κάθε i, η ακολουθία συνόλων $\{A_i \cap E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και ισχύει

$$A_i \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_i \cap E_n).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_E \phi &= \int_{\mathbb{R}} \phi\chi_E = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lim_{n\to\infty} m(A_i \cap E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.2.7 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης) *Αν $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ είναι μιά αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων επεκτεταμένων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Απόδειξη.
Η ακολουθία επεκτεταμένων πραγματικών αριθμών $\int_{\mathbb{R}} f_n$ είναι αύξουσα και $\int_{\mathbb{R}} f_n \leq \int_{\mathbb{R}} f$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$ υπάρχει (ως επεκτεταμένος πραγματικός αριθμός) και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \leq \int_{\mathbb{R}} f.$$

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τυχαίο $\varepsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \geq (1-\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} f. \tag{3.2}$$

Λόγω τού ορισμού τού ολοκληρώματος, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \geq (1-\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} \phi, \tag{3.3}$$

για κάθε θετική, απλή, ολοκληρώσιμη συνάρτηση ϕ με $\phi \leq f$. Έστω λοιπόν μιά τέτοια ϕ.

Θεωρούμε τα σύνολα $E_n = \{f_n \geq (1-\varepsilon)\phi\}$. Αυτά αποτελούν μιά αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Επιπλέον, επειδή $f_n \xrightarrow{\sigma} f > (1-\varepsilon)\phi$, ισχύει $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}$. Έτσι από το Λήμμα 3.2.6 προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \geq \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n \geq \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon) \int_{E_n} \phi = (1-\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} \phi$$

και η (3.3) αποδείχθηκε. □

Παράδειγμα 3.2.8 Θα δούμε ότι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δεν ισχύει για ολοκληρώματα Riemann. Έστω $q_1, q_2, q_3 \ldots$ μια αρίθμηση τού $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = q_1, q_2, \ldots, q_n, \\ 0, & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}. \end{cases}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση f_n έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας. Άρα είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0,1]$. Η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία θετικών απλών συναρτήσεων και ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0,1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Υπολογίζοντας τα πάνω και κάτω αθροίσματα Riemann, βρίσκουμε ότι η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Για ολοκληρώματα Lebesgue, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = \int_{[0,1]} f = 0.$$

Πρόταση 3.2.9 *Αν η $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ είναι μιά μετρήσιμη συνάρτηση, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{\psi_n\}$ θετικών, απλών, ολοκληρώσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε*

$$\psi_n \xrightarrow{\sigma} f \ \ \textit{στο}\ \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 2.5.1, υπάρχει αύξουσα ακολουθία θετικών, απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ με $\phi_n \xrightarrow{\sigma} f$. Θέτουμε $\psi_n = \phi_n \chi_{[-n,n]}$. Η $\{\psi_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία ολοκληρώσιμων, θετικών, απλών συναρτήσεων και $\psi_n \xrightarrow{\sigma} f$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, $\int_{\mathbb{R}} \psi_n \to \int_{\mathbb{R}} f$. □

Θεώρημα 3.2.10 *Αν οι $f, g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ είναι μετρήσιμες, τότε*

(α) $\int_{\mathbb{R}} (f+g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g$ *και*

(β) $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$, *όπου τα E, F είναι ξένα, μετρήσιμα σύνολα.*

Απόδειξη.
(α) Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.9, θεωρούμε αύξουσες ακολουθίες $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ ολοκληρώσιμων, θετικών, απλών συναρτήσεων με $\phi_n \xrightarrow{\sigma} f$ και $\psi_n \xrightarrow{\sigma} g$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης τρείς φορές παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g.$$

(β) Θέτουμε $f_1 = f\chi_E$ και $f_2 = f\chi_F$. Τότε $f\chi_{E\cup F} = f_1 + f_2$. Τέλος εφαρμόζουμε το (α). □

Πρόταση 3.2.11 *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη. Ισχύει $\int_{\mathbb{R}} f = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π.*

Απόδειξη.
Αν $f = 0$ σ.π., τότε $m(\{f > 0\}) = 0$. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\{f=0\}} f + \int_{\{f>0\}} f = 0 + 0 = 0.$$

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} f = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ανισότητα Chebyshev δίνει

$$m(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int_{\mathbb{R}} f = 0.$$

Όμως $\{f > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{f \geq 1/n\}$. Άρα $m(\{f > 0\}) = 0$, δηλαδή $f = 0$ σ.π..
□

Θεώρημα 3.2.12 (**B. Levi**) *Αν* $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, *είναι μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n \right).$$

Απόδειξη.
Η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$$

είναι αύξουσα. Από το Θεώρημα Μονότονης Συγκλισης

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_N = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{N} f_n \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.2.13 (**Λήμμα τού Fatou**) *Έστω* $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Απόδειξη.
Θέτουμε $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\} = \inf_{k\geq n} f_k$. Η ακολουθία συναρτήσεων $\{g_n\}$ είναι προφανώς αύξουσα. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k = \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n. \tag{3.4}$$

Επειδή $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$, ισχύει $\int_{\mathbb{R}} g_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_k$ για κάθε $k \geq n$. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \leq \inf_{k\geq n} \int_{\mathbb{R}} f_k.$$

Επομένως η (3.4) δίνει

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int_{\mathbb{R}} f_k = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

$\square$.

3.3 Το ολοκλήρωμα στη γενική περίπτωση

Ορισμός 3.3.1 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση. Αν τουλάχιστον μιά από τις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμη (δηλαδή ανήκει στον L^1), τότε ορίζουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^-.$$

Αν $f^+ \in L^1$ και $f^- \in L^1$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και γράφουμε $f \in L^1$.

Ορισμός 3.3.2 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $E \in \mathcal{M}$, ορίζουμε

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}} f\chi_E = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

εφόσον η διαφορά ορίζεται. Η f ονομάζεται ολοκληρώσιμη στο E όταν $|f| \in L^1(E)$. Αν το E είναι ένα διάστημα με άκρα a, b, για το $\int_E f$, χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $\int_a^b f$.

Πρόταση 3.3.3 *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση. Ισχύει $f \in L^1$ αν και μόνο αν $|f| \in L^1$. Αν $f \in L^1$, τότε*

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

Απόδειξη.
Έστω $f \in L^1$. Από τον ορισμό, $f^+, f^- \in L^1$. Άρα $|f| = f^+ + f^- \in L^1$. Αντιστρόφως, αν $|f| \in L^1$, τότε $f^+, f^- \in L^1$ (διότι $0 \leq f^{\pm} \leq |f|$). Άρα $f \in L^1$.
Αν $f \in L^1$, τότε

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f^+ - \int_{\mathbb{R}} f^-\right| \leq \int_{\mathbb{R}} f^+ + \int_{\mathbb{R}} f^- = \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

$\square$

Παρατηρήσεις

1. Για μετρήσιμες, θετικές συναρτήσεις, οι παραπάνω ορισμοί είναι συμβατοί με τους ορισμούς της προηγούμενης παραγράφου.

2. Αν $f \in L^1$ και $m(E) = 0$, τότε $\int_E f = 0$.

3. Αν f, g είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις και $|f| \leq |g|$ σ.π. και $g \in L^1$, τότε $f \in L^1$ και $\int_{\mathbb{R}} |f| \leq \int_{\mathbb{R}} |g|$.

4. Αν f, g είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις και $f = g$ σ.π. και $g \in L^1$, τότε $f \in L^1$ και $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g$.

5. Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $f \in L^1([a, b])$.

Θεώρημα 3.3.4 *Αν $c \in \mathbb{R}$ και $f, g \in L^1$, τότε $cf \in L^1$, $f + g \in L^1$ και*

$$\int_{\mathbb{R}} cf = c \int_{\mathbb{R}} f, \qquad \int_{\mathbb{R}} (f + g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g.$$

Απόδειξη.
Ισχύει $|cf| = |c|\,|f|$ και $|f + g| \leq |f| + |g|$. Άρα $cf \in L^1$ και $f + g \in L^1$. Παρατηρούμε ότι

$$(cf)^{\pm} = \begin{cases} cf^{\pm}, & \text{αν } c \geq 0, \\ -cf^{\mp}, & \text{αν } c < 0. \end{cases}$$

Προκύπτει εύκολα ότι $\int_{\mathbb{R}} cf = c \int_{\mathbb{R}} f$.

Από τις προφανείς ισότητες

$$(f + g)^+ - (f - g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

έπεται ότι

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Αυτή είναι ισότητα *θετικών*, ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} (f + g)^+ + \int_{\mathbb{R}} f^- + \int_{\mathbb{R}} g^- = \int_{\mathbb{R}} (f + g)^- + \int_{\mathbb{R}} f^+ + \int_{\mathbb{R}} g^+,$$

δηλαδή
$$\int_{\mathbb{R}}(f+g)=\int_{\mathbb{R}} f+\int_{\mathbb{R}} g.$$
$\square$

Πρόταση 3.3.5 *Αν* $f, g \in L^1$ *και* $f \geq g$ *σ.π., τότε* $\int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{\mathbb{R}} g$.

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 3.3.4,
$$\int_{\mathbb{R}} f-\int_{\mathbb{R}} g=\int_{\mathbb{R}}(f-g) \geq 0.$$
$\square$

Πρόταση 3.3.6 *Αν* $f, g \in L^1$, *τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(α) $f \sim g$.
(β) $\int_{\mathbb{R}}|f-g|=0$.
(γ) $\forall E \in \mathcal{M},\ \int_E f=\int_E g$.

Απόδειξη.

(α) $\Leftrightarrow$ (β): Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.2.11.
(β) $\Rightarrow$ (γ):
$$\left|\int_E f-\int_E g\right|=\left|\int_E(f-g)\right| \leq \int_E|f-g| \leq \int_{\mathbb{R}}|f-g|=0.$$
(γ) $\Rightarrow$ (β): Θέτουμε $E=\{f-g \geq 0\}$. Ισχύει
$$\int_{\mathbb{R}}|f-g|=\int_E(f-g)+\int_{E^c}(g-f)=0+0=0.$$
$\square$

3.4 Το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης

Θεώρημα 3.4.1 (**Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης**) *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων* $f_n \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι:*
(α) $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ *στο* $\mathbb{R}$.
(β) *Υπάρχει συνάρτηση* $g \in L^1$ *τέτοια ώστε* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leq g(x)$.
Τότε $f \in L^1$ *και*
$$\int_{\mathbb{R}} f=\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Απόδειξη.
Εφόσον $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$ και $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $|f| \leq g$. Άρα $f \in L^1$. Οι ακολουθίες $g + f_n$ και $g - f_n$ είναι ακολουθίες *θετικών* συναρτήσεων. Χρησιμοποιούμε το Λήμμα τού Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}} g + \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} (f+g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g + f_n) = \int_{\mathbb{R}} g + \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n. \tag{3.5}$$

Επίσης

$$\int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} (f-g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g - f_n) = \int_{\mathbb{R}} g - \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n. \tag{3.6}$$

Από τις (3.5) και (3.6) προκύπτει ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$ υπάρχει και είναι ίσο με $\int_{\mathbb{R}} f$. □

Θεώρημα 3.4.2 (**Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης**, ισχυρότερη μορφή) *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $f_n \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι:*
(α) $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ *σ.π. στο* $\mathbb{R}$.
(β) *Υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1$ τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ και για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$. Τότε $f \in L^1$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = 0 \quad \textit{και} \quad \int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Απόδειξη.
Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ *σ.π.*, θα έχουμε $|f| \leq g$ *σ.π.*. Άρα $f \in L^1$. Από τις υποθέσεις, υπάρχει σύνολο E τέτοιο ώστε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E, $|f_n| \leq g$ στο E και $m(\mathbb{R} \setminus E) = 0$. Θέτουμε $F_n = |f_n - f|\chi_E$. Ισχύει $F_n \xrightarrow{\sigma} 0$ στο $\mathbb{R}$ και

$$0 \leq F_n(x) \leq (|f_n(x)| + |f(x)|)\chi_E(x) \leq 2g(x)\chi_E, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.4.1 στην ακολουθία συναρτήσεων $\{F_n\}$ και παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n = 0,$$

δηλαδή
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|=\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|=0.$$
Τέλος, επειδή
$$\left|\int_{\mathbb{R}}f_n-\int_{\mathbb{R}}f\right|\leq\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|,$$
έχουμε
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n=\int_{\mathbb{R}}f.$$
□

Θεώρημα 3.4.3 (**Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης**) *Δίνεται μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι:*
(α) $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ *στο* E.
(β) *Υπάρχει σταθερά* M *τέτοια ώστε* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$, $|f_n(x)| \leq M$.
(γ) $m(E) < \infty$.
Τότε $f \in L^1(E)$ *και*
$$\int_E f=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n.$$
Απόδειξη.
Λόγω της υπόθεσης (γ), η συνάρτηση $g = M\chi_E$ είναι ολοκληρώσιμη. Έτσι το θεώρημα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης. □

Θεώρημα 3.4.4 *Έστω* $f_n \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$. *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n| < \infty$, *τότε η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει σ.π. προς μιά συνάρτηση που ανήκει στον* L^1. *Επιπλέον ισχύει*
$$\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)\right|\leq\int_{\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n|$$
και
$$\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n.$$
Απόδειξη.
Θέτουμε $g = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$. Από το Θεώρημα Levi, έχουμε
$$\int_{\mathbb{R}}g=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n|<\infty.$$

Άρα $g \in L^1$ και επομένως η g είναι σ.π. πεπερασμένη. Επομένως η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σ.π. προς μιά συνάρτηση f και μάλιστα $|f| \leq g$ σ.π.. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \leq \int_{\mathbb{R}} g,$$

οι οποίες είναι ακριβώς αυτές που θέλαμε να αποδείξουμε.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |f_n| \leq g, \ \sigma.\pi. \quad \text{και} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n = f \ \sigma.\pi..$$

Έτσι το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης δίνει

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n\right) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n. \end{aligned}$$

□

Το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης είναι το βασικό θεώρημα εναλλαγής ολοκλήρωσης και ορίου ακολουθίας. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης οδηγεί και στην εναλλαγή ολοκλήρωσης και ορίου συνάρτησης, καθώς επίσης και στην εναλλαγή ολοκλήρωσης και παραγώγισης.

Θεώρημα 3.4.5 *Έστω $E \in \mathcal{M}$. Θεωρούμε συνάρτηση $f : E \times [a,b] \to \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [a,b]$, η συνάρτηση $f(\cdot,t) : E \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο E. Θέτουμε*

$$F(t) = \int_E f(x,t)\,dx.$$

(α) *Αν υπάρχει $g_1 \in L^1(E)$ τέτοια ώστε $|f(x,t)| \leq g_1(x)$, $\forall x \in E$, $\forall t \in [a,b]$, και αν $\lim_{t\to t_o} f(x,t) = f(x,t_o)$, $\forall x \in E$, τότε*

$$\lim_{t\to t_o} F(t) = \lim_{t\to t_o} \int_E f(x,t)\,dx = \int_E (\lim_{t\to t_o} f(x,t))\,dx = \int_E f(x,t_o)\,dx = F(t_o).$$

(β) *Αν υπάρχει* $g_2 \in L^1(E)$ *τέτοια ώστε* $|f(x,t)| \le g_2(x)$, $\forall x \in E$, $\forall t \in [a,b]$, *και αν η* $f(x,\cdot)$ *είναι συνεχής στο* $[a,b]$ *για κάθε* $x \in E$, *τότε η* F *είναι συνεχής στο* $[a,b]$.

(γ) *Αν η μερική παράγωγος* $\partial f/\partial t$ *υπάρχει* $\forall x \in E$, $\forall t \in [a,b]$ *και αν*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g_3(x), \quad \forall x \in E, \ \forall t \in [a,b],$$

όπου $g_3 \in L^1(E)$, *τότε η* F *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ *και*

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx, \quad t \in [a,b].$$

Απόδειξη.
(α) Έστω $\{t_n\}$ τυχούσα ακολουθία στο $[a,b]$ με $t_n \to t_o$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης στην ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = f(x,t_n)$ η οποία, από την υπόθεση, συγκλίνει σημειακά στο E προς τη συνάρτηση $\phi(x) = f(x,t_o)$. Προκύπτει

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty}\int_E f(x,t_n)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx \\
&= \int_E \phi(x)\,dx = \int_E f(x,t_o)\,dx = F(t_o).
\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{t\to t_o} F(t) = F(t_o)$.

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α).

(γ) Έστω πάλι $\{t_n\}$ τυχούσα ακολουθία στο $[a,b]$ με $t_n \to t_o$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_o)}{t_n - t_o}.$$

Από τον ορισμό της μερικής παραγώγου,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_o), \quad x \in E.$$

Άρα για κάθε $t \in [a,b]$, η συνάρτηση $\partial f/\partial t(\cdot,t)$ είναι μετρήσιμη. Επιπλέον το θεώρημα μέσης τιμής δίνει

$$|h_n(x)| \le \sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g_3(x), \quad x \in E.$$

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης στην ακολουθία $\{h_n\}$:

$$\begin{aligned} F'(t_o) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n)-F(t_o)}{t_n-t_o} = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n(x)\,dx = \int_E (\lim_{n\to\infty} h_n(x))\,dx \\ &= \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_o)\,dx. \end{aligned}$$

□

3.5 Σύγκριση ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue

Θυμίζουμε πρώτα κάποιες βασικές έννοιες και μερικά βασικά θεωρήματα από τη θεωρία τού ολοκληρώματος Riemann· βλ. π.χ. [9], [7].

Έστω f μιά συνάρτηση φραγμένη στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_m = b\}$ είναι μιά διαμέριση τού $[a,b]$, θέτουμε

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1,2,\ldots m,$$

και σχηματίζουμε το κατώτερο και το ανώτερο άθροισμα Riemann της f:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^m m_i(x_i - x_{i-1}), \quad U(f,P) = \sum_{i=1}^m M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας τού Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει διαμέριση P τού $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Επιπλέον, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, αν και μόνο αν

$$\inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P),$$

όπου το inf και το sup λαμβάνονται στο σύνολο όλων των διαμερίσεων P τού $[a,b]$. Από δώ και πέρα, για να μην υπάρχει σύγχυση μεταξύ των ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue, θα συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Riemann με

$$(R)\int_a^b f \quad \text{ή} \quad (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, τότε υπάρχει μιά αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}$ τού $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = (R)\int_a^b f.$$

Μιά συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ονομάζεται **κλιμακωτή** αν υπάρχει διαμέριση $P=\{a=x_o,x_1,\ldots,x_m=b\}$ τέτοια ώστε η f να είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα (x_{i-1},x_i). Είναι φανερό ότι κάθε κλιμακωτή συνάρτηση είναι συνεχής εκτός ενδεχομένως από τα σημεία x_i τα οποία είναι πεπερασμένου πλήθους. Επομένως είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Αν a_i είναι η τιμή μιάς κλιμακωτής συνάρτησης f στο διάστημα (x_{i-1},x_i), τότε η f είναι ισοδύναμη με την απλή συνάρτηση

$$\phi = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{[x_{i-1},x_i)}.$$

Πράγματι οι f και ϕ ενδέχεται να διαφέρουν μόνο στα σημεία x_i. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue και μάλιστα

$$(R)\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^m a_i(x_i - x_{i-1}).$$

Θεώρημα 3.5.1 *Αν μιά συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, τότε $f\in L^1([a,b])$ και*

$$(R)\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

Απόδειξη.
Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, υπάρχει μιά ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}$ τού $[a,b]$, τέτοια ώστε $P_n\subset P_{n+1}$ και

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = (R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

Θέτουμε $P_n=\{a=x_o,x_1,\ldots,x_m=b\}$,

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i=1,2,\ldots m.$$

και θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις

$$\ell_n = \sum_{i=1}^m m_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}, \quad u_n = \sum_{i=1}^m M_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}.$$

Είναι φανερό ότι $\ell_n \leq f \leq u_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, επειδή η ακολουθία $\{P_n\}$ είναι αύξουσα, η ακολουθία $\{\ell_n\}$ είναι αύξουσα και η ακολουθία $\{u_n\}$ είναι φθίνουσα. Θέτουμε $\ell = \sup_n \ell_n$ και $u = \inf_n u_n$. Οι ℓ και u είναι φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις και ικανοποιούν τις ανισότητες $\ell \leq f \leq u$ στο $[a,b]$.

Από την κατασκευή των ℓ_n, u_n είναι προφανές ότι

$$L(f,P_n) = (R)\int_a^b \ell_n = \int_a^b \ell_n, \quad U(f,P_n) = (R)\int_a^b u_n = \int_a^b u_n.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}(R)\int_a^b f &= \sup_n L(f,P_n) = \sup_n \int_a^b \ell_n \leq \int_a^b \ell \leq \int_a^b u \leq \inf_n \int_a^b u_n \\ &= \inf_n U(f,P_n) = (R)\int_a^b f.\end{aligned}$$

Άρα $\int_a^b u = \int_a^b \ell$. Από την Πρόταση 3.2.11, $\ell = u = f$ σ.π.. Επομένως η f είναι μετρήσιμη και ισχύει

$$(R)\int_a^b f = \int_a^b f.$$

$\square$

Δείξαμε λοιπόν ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι γενίκευση τού ολοκληρώματος Riemann. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue **δεν** είναι γενίκευση τού γενικευμένου ολοκληρώματος Riemann.

Παράδειγμα 3.5.2 Θα δείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann

$$(R)\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

υπάρχει, ενώ το ολοκλήρωμα Lebesgue

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

δεν υπάρχει.

Με παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκουμε ότι

$$(R)\int_\pi^M \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos M}{M} - \frac{1}{\pi} - (R)\int_\pi^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Ισχύει $\lim_{M\to\infty} \frac{\cos M}{M} = 0$. Επίσης το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$(R)\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}(R)\int_{\pi}^{M} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

υπάρχει, διότι $|\cos x|/x^2 \le 1/x^2$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$(R)\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

υπάρχει.

Θέτουμε $f(x) = \sin x/x$. Αν $f \in L^1([\pi,\infty))$, τότε $|f| \in L^1([\pi,\infty))$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Levi βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{\infty} |f| &= \int_{\mathbb{R}} f\chi_{[\pi,\infty)} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=2}^{\infty} |f|\chi_{[(n-1)\pi,n\pi]} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|\chi_{[(n-1)\pi,n\pi]} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx = \infty.\end{aligned}$$

Άρα $f \notin L^1([\pi,\infty])$.

Σκοπός μας τώρα είναι να βρούμε συνθήκες ώστε το ολοκλήρωμα Lebesgue να ταυτίζεται με το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 3.5.3 *Έστω ότι $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$.*
(α) *Αν $f \in L^1([a,\infty))$, τότε*

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f. \tag{3.7}$$

(β) *Αν $f \in L^1((-\infty,a])$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{a} f = \lim_{r\to-\infty} \int_r^a f. \tag{3.8}$$

(γ) *Αν $f \in L^1([a,b])$, τότε*

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f. \tag{3.9}$$

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο το (α). Οι αποδείξεις των (β), (γ) είναι παρόμοιες. Επεκτείνουμε την f στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $f = 0$ στο $(-\infty, a)$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $\{R_n\}$ με $R_n \to \infty$ και θέτουμε $f_n = f\chi_{[a,R_n]}$. Ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}$$

και

$$|f_n| \leq |f| \in L^1.$$

Το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης εφαρμοζόμενο στην ακολουθία $\{f_n\}$ δίνει

$$\int_a^\infty f = \int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^{R_n} f.$$

Επειδή η ακολουθία $\{R_n\}$ είναι τυχούσα, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^\infty f = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f.$$

□

Θεώρημα 3.5.4 (α) *Υποθέτουμε ότι η $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, M]$ για κάθε M με $a < M < \infty$, και ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann*

$$(R) \int_a^\infty |f|$$

υπάρχει. Τότε τα ολοκληρώματα

$$(R) \int_a^\infty f \quad \textit{και} \quad \int_a^\infty f$$

υπάρχουν και είναι ίσα.
(β) *Υποθέτουμε ότι η $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[r, a]$ για κάθε $r < a$, και ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann*

$$(R) \int_{-\infty}^a |f|$$

υπάρχει. Τότε τα ολοκληρώματα

$$(R) \int_{-\infty}^a f \quad \textit{και} \quad \int_{-\infty}^a f$$

υπάρχουν και είναι ίσα.
(γ) *Υποθέτουμε ότι η $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b - \varepsilon]$ για κάθε ε με $0 < \varepsilon < b - a$, και ότι το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα Riemann*

$$(R)\int_a^b |f|$$

υπάρχει. Τότε τα ολοκληρώματα

$$(R)\int_a^b f \quad \text{και} \quad \int_a^b f$$

υπάρχουν και είναι ίσα.
(δ) *Υποθέτουμε ότι η $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a + \varepsilon, b]$ για κάθε ε με $0 < \varepsilon < b - a$, και ότι το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα Riemann*

$$(R)\int_a^b |f|$$

υπάρχει. Τότε τα ολοκληρώματα

$$(R)\int_a^b f \quad \text{και} \quad \int_a^b f$$

υπάρχουν και είναι ίσα.

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο το (α). Η απόδειξη των (β), (γ), (δ) είναι παρόμοια. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, άρα και μετρήσιμη στο $[a, M]$ για κάθε M με $a < M < \infty$. Συνεπώς η f είναι μετρήσιμη στο $[a, \infty)$. Επίσης ισχύει

$$(R)\int_a^M f = \int_a^M f \quad \text{και} \quad (R)\int_a^M |f| = \int_a^M |f|.$$

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δίνει

$$\int_a^\infty |f| = \lim_{n\to\infty}\int_a^n |f| = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^n |f| = (R)\int_a^\infty |f| < \infty.$$

Από το Θεώρημα 3.5.3,

$$(R)\int_a^\infty f = \lim_{M\to\infty}(R)\int_a^M f = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f = \int_0^\infty f.$$

$\square$

Πόρισμα 3.5.5 (α) *Υποθέτουμε ότι η* $f:[a,\infty)\to[0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο* $[a,M]$ *για κάθε* M *με* $a<M<\infty$. *Τότε τα ολοκληρώματα* $(R)\int_a^\infty f,\ \int_a^\infty f$ *είτε υπάρχουν και τα δύο (ως πραγματικοί αριθμοί) και είναι ίσα, είτε είναι και τα δύο ίσα με* $+\infty$.
(β) *Υποθέτουμε ότι η* $f:(-\infty,a]\to[0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο* $[r,a]$ *για κάθε* $r<a$. *Τότε τα ολοκληρώματα* $(R)\int_{-\infty}^a f,\ \int_{-\infty}^a f$ *είτε υπάρχουν και τα δύο (ως πραγματικοί αριθμοί) και είναι ίσα, είτε είναι και τα δύο ίσα με* $+\infty$.
(γ) *Υποθέτουμε ότι η* $f:[a,b)\to[0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο* $[a,b-\varepsilon]$ *για κάθε* ε *με* $0<\varepsilon<b-a$. *Τότε τα ολοκληρώματα* $(R)\int_a^b f,\ \int_a^b f$ *είτε υπάρχουν και τα δύο (ως πραγματικοί αριθμοί) και είναι ίσα, είτε είναι και τα δύο ίσα με* $+\infty$.
(δ) *Υποθέτουμε ότι η* $f:(a,b]\to[0,\infty)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο* $[a+\varepsilon,b]$ *για κάθε* ε *με* $0<\varepsilon<b-a$. *Τότε τα ολοκληρώματα* $(R)\int_a^b f,\ \int_a^\infty f$ *είτε υπάρχουν και τα δύο (ως πραγματικοί αριθμοί) και είναι ίσα, είτε είναι και τα δύο ίσα με* $+\infty$.

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο το (α). Οι αποδείξεις των (β), (γ) είναι παρόμοιες. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
Περίπτωση 1: $(R)\int_a^\infty f<\infty$.
Τότε από το Θεώρημα 3.5.4, $\int_a^\infty f=(R)\in_a^\infty f$.
Περίπτωση 2: $(R)\int_a^\infty f=\infty$.
Τότε, αν $f\in L^1([a,\infty))$, το Θεώρημα 3.5.3 δίνει

$$\int_a^\infty f=\lim_{M\to\infty}\int_a^M f=\lim_{M\to\infty}(R)\int_a^M f=(R)\int_a^\infty f=\infty.$$

Άτοπο. Άρα $f\notin L^1([a,\infty))$, δηλαδή $\int_a^\infty f=\infty$. $\square$

Παράδειγμα 3.5.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x^s},\quad x\in(0,1].$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f$ (αν υπάρχει) για τις διάφορες τιμές τής παραμέτρου $s\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $f(0)=0$ και διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις.
(α) $s\le 0$.
Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 f=(R)\int_0^1 f=(R)\int_0^1 x^{-s}\,dx=\frac{1}{1-s}.$$

(β) $0 < s < 1$.
Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\varepsilon, 1]$ για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ και

$$(R)\int_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{1}{1-s} - \frac{\varepsilon^{1-s}}{1-s}\right] = \frac{1}{1-s}.$$

Λόγω τού Θεωρήματος 3.5.4(δ), ισχύει $f \in L^1([0,1])$ και $\int_0^1 f = 1/(1-s)$.
(γ) $s \geq 1$.
Αν $f \in L^1([0,1])$, τότε το Θεώρημα 3.5.3(γ) δίνει

$$\int_0^1 f = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 f = \lim_{\varepsilon\to 0+}(R)\int_\varepsilon^1 f = \infty.$$

Άτοπο. Άρα $f \notin L^1([0,1])$. Επειδή $f \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι $\int_0^1 f = \infty$.

Παράδειγμα 3.5.7 Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann

$$(R)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

υπάρχει και μάλιστα

$$\begin{aligned}(R)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \lim_{a\to-\infty}(-\tan^{-1}a) + \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}b = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 3.5.4, η συνάρτηση $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ ανήκει στον L^1 και

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

3.6 $*$ Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.6.1 Η εναλλαγή άθροισης και ολοκλήρωσης δεν είναι πάντα δυνατή. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in (0,\infty)$, ισχύει

$$|f_n(x)| \leq e^{-nx} + 2e^{-2nx} =: g_n(x).$$

Επίσης, για $M > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\int_0^M g_n = \int_0^M (e^{-nx} + 2e^{-2nx})\,dx = \frac{2}{n} - \frac{1}{n}(e^{-2nM} + e^{-nM}).$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(R)\int_0^\infty g_n = \lim_{M\to\infty} \int_0^M g_n = \frac{2}{n}.$$

Λόγω τού Θεωρήματος 3.5.4, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L^1((0,\infty))$. Άρα ισχύει και $f_n \in L^1((0,\infty))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 3.5.3, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty f_n = \lim_{M\to\infty} \int_0^M f_n = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{n}(e^{-2nM} - e^{-nM}) = 0.$$

Από την άλλη μεριά, για $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \sum_{n=1}^\infty (e^{-nx} - 2e^{-2nx}) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} =: h(x).$$

Η συνάρτηση h είναι θετική και ισχύει

$$\begin{aligned}(R)\int_0^\infty h &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \\ &= \lim_{M\to\infty}\int_{e^{-M}}^1 \frac{du}{1+u} \\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\log 2 - \log(1+e^{-M})\right) = \log 2.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 3.5.4, $h \in L^1((0,\infty))$ και

$$\int_0^\infty h = \log 2.$$

Τελικά λοιπόν

$$0 = \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\infty f_n\right) \neq \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \int_0^\infty h = \log 2.$$

Παράδειγμα 3.6.2 Η συνάρτηση Γάμμα. Για $t \in [0, \infty)$, θεωρούμε τη συνάρτηση
$$F_t(x) = e^{-x} x^{t-1}, \quad x \in [0, \infty).$$
Θα δείξουμε ότι $F_t \in L^1([0, \infty))$ για κάθε $t \in (0, \infty)$.

Για $x \in (0, 1]$ και $t \in (0, \infty)$, ισχύει
$$0 \leq e^{-x} x^{t-1} \leq x^{t-1}.$$
Από το Παράδειγμα 3.5.6, η συνάρτηση $x \mapsto x^{t-1}$ ανήκει στον $L^1((0, 1])$. Άρα $F_t \in L^1((0, 1])$.

Για $t \in \mathbb{R}$, ισχύει
$$\lim_{x \to \infty} e^{-x/2} x^{t-1} = 0.$$
Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε
$$0 \leq e^{-x/2} x^{t-1} \leq M, \quad x \in [1, \infty), \ \ t \in \mathbb{R}.$$
Επομένως
$$0 \leq e^{-x} x^{t-1} \leq M \, e^{-x/2}, \quad x \in [1, \infty), \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$
Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $(R) \int_1^\infty e^{-x/2} \, dx$ συγκλίνει. Άρα θα συγκλίνει και το $(R) \int_1^\infty e^{-x/2} x^{t-1} \, dx$. Από το Θεώρημα 3.5.4(α), $F_t \in L^1([1, \infty))$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $F_t \in L^1([0, \infty))$ για κάθε $t \in (0, \infty)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση
$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} \, dx, \ \ t \in (0, \infty),$$
η οποία ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Για $0 < a < b < \infty$, ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει
$$\int_a^b e^{-x} x^t \, dx = a^t e^{-a} - b^t e^{-b} + t \int_a^b e^{-x} x^{t-1} \, dx.$$
Παίρνουμε όρια για $a \to 0+$ και $b \to \infty$, και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.5.3 βρίσκουμε ότι η συνάρτηση Γάμμα ικανοποιεί τη **συναρτησιακή εξίσωση**
$$\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t), \quad t > 0.$$
Επίσης $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1$. Έτσι από τη συναρτησιακή εξίσωση προκύπτει ότι
$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για $0 < a < b < \infty$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g_1(x) = \begin{cases} x^{a-1}, & 0 < x \leq 1, \\ Me^{-x/2}, & x \geq 1, \end{cases}$$

όπου M είναι η θετική σταθερά που εμφανίζεται στην ανισότητα (3.10). Παρατηρούμε ότι

$$0 \leq e^{-x}x^{t-1} \leq g_1(x), \quad x \in (0, \infty), \quad t \in [a, b].$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $g_1 \in L^1((0, \infty))$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.5(β) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Γ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Επειδή το $[a, b]$ είναι τυχαίο υποδιάστημα τού $(0, \infty)$, η Γ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

Θέτουμε

$$g_2(x) = \begin{cases} x^{a-1}|\log x|, & 0 < x \leq 1, \\ Me^{-x/2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι $g_2 \in L^1((0, \infty))$ και

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}(e^{-x}x^{t-1})\right| = |e^{-x}x^{t-1}\log x| \leq g_2(x), \quad x \in (0, \infty), \quad t \in [a, b].$$

Από το Θεώρημα 3.4.5(γ), η συνάρτηση Γ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$ και

$$\Gamma'(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\log x \, dx, \quad t \in (0, \infty).$$

Παράδειγμα 3.6.3 Γάμμα και ζήτα. Για $t > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty n^{-t}$ συγκλίνει. Ορίζουμε λοιπόν τη **συνάρτηση ζήτα τού Riemann** με την ισότητα

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^t}, \quad t \in (1, \infty).$$

Θα βρούμε μια ολοκληρωτική παράσταση για το γινόμενο των συναρτήσεων ζ και Γ.

Στο ολοκλήρωμα

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1} \, dx, \quad t > 0,$$

κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = x/n$ (γιατί επιτρέπεται αυτή η πράξη;) και προκύπτει

$$\Gamma(t) = n^t \int_0^\infty e^{-nu} u^{t-1}\, du, \quad t > 0.$$

Άρα

$$\frac{1}{n^t}\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-nx} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0.$$

Για $t > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty n^{-t}$ συγκλίνει. Άρα

$$\zeta(t)\Gamma(t) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{t-1}\, dx, \quad t > 1.$$

Από το Θεώρημα τού Levi,

$$\zeta(t)\Gamma(t) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{t-1}\, dx.$$

Όμως

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Συνεπώς

$$\zeta(t)\Gamma(t) = \int_0^\infty \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

Παράδειγμα 3.6.4 Έστω $t > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{-xt}\, \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Επειδή

$$|f(x)| \leq e^{-xt} =: g(x), \;\; x > 0,$$

και $g \in L^1((0,\infty))$, ισχύει $f \in L^1((0,\infty))$. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\, \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad t \in (0, \infty).$$

Για $0 < a < b < \infty$, ισχύει

$$\left| e^{-xt}\, \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-ax} =: g_1(x), \quad x \in (0,\infty), \;\; t \in [a,b],$$

και $g_1 \in L^1((0,\infty))$. Από το Θεώρημα 3.4.5, η F είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή το $[a,b]$ είναι τυχαίο υποδιάστημα τού $(0,\infty)$, η F είναι συνεχής στο $(0,\infty)$.

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{t\to\infty} F(t)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο τής απόδειξης τού Θεωρήματος 3.4.5. Έστω $\{t_n\}$ μιά αυξ-ουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $t_n \geq 1$ και $t_n \to \infty$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = e^{-xt_n}\frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0,\infty).$$

Η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $(0,\infty)$ προς τη μηδενική συνάρτηση. Επίσης $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ για κάθε $x \in (0,\infty)$ και η $g_2(x) = e^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$. Το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Όμως $\int_0^\infty f_n = F(t_n)$. Άρα $F(t_n) \to 0$. Συνεπώς

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0.$$

Υπολογίζουμε τώρα την παράγωγο τής F. Θεωρούμε πάλι διάστημα $[a,b] \subset (0,\infty)$. Για $x \in (0,\infty)$ και $t \in [a,b]$, ισχύει

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right)\right| = |-e^{-tx}\sin x| \leq e^{-ax} =: g_3(x)$$

και $g_3 \in L^1((0,\infty))$. Έτσι το Θεώρημα 3.4.5 δίνει

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\, dx.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^M e^{-tx}\sin x\, dx$ μπορεί να υπολογιστεί με τις μεθόδους τού Λογισμού. Πράγματι, εφαρμόζοντας δύο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βρίσκουμε ότι

$$\int_0^M e^{-tx}\sin x\, dx = \frac{e^{-Mt}(-t\sin M - \cos M)}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Παίρνουμε όρια για $M \to \infty$ και λόγω τού Θεωρήματος 3.5.4 προκύπτει

$$\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\, dx = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in (0,\infty).$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in (0,\infty).$$

Ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε ότι

$$F(t) - F(M) = -\int_M^t \frac{1}{1+t^2}\,dt = \tan^{-1} M - \tan^{-1} t, \quad t > 0,\ M > 0.$$

Παίρνοντας όρια για $M \to \infty$ προκύπτει ότι $F(t) = \pi/2 - \tan^{-1} t$. Επομένως δείξαμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} t, \quad t \in (0,\infty).$$

3.7 Ασκήσεις

3.7.1 Αν $m(E) = 0$ και ϕ είναι μιά θετική, απλή συνάρτηση, δείξτε ότι $\int_E \phi = 0$.

3.7.2 Αν ϕ είναι μιά θετική, απλή συνάρτηση και $\phi = 0$ $\sigma.\pi.$, δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} \phi = 0$.

3.7.3 Αν ϕ είναι μιά θετική, απλή συνάρτηση, δείξτε ότι $\int_E \phi \geq 0$.

3.7.4 Δείξτε ότι μιά θετική, απλή συνάρτηση ϕ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $m(\{\phi \neq 0\}) < \infty$.

3.7.5 Αν η $f : E \to [0,\infty)$ είναι μετρήσιμη και $f \leq K$ στο E, δείξτε ότι $\int_E f \leq Km(E)$.

3.7.6 Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και ισχύει $0 \leq f \leq g$ και $g \in L^1$, δείξτε ότι $f \in L^1$.

3.7.7 Δίνονται συναρτήσεις f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, θετικές και μετρήσιμες. Υποθέτουμε ότι
(α) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$
(β) $\int_{\mathbb{R}} f_1 < \infty$
(γ) $f_n \to f$ σημειακά στο $\mathbb{R}$.
Δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} f = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n$. Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι η υπόθεση (β) είναι απαραίτητη.
Υπόδειξη: Έστω $g_n = f_1 - f_n$ και Θ.Μ.Σ.

3.7.8 Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\{E_n\}$ είναι μιά ακολουθία ξένων ανά δύο, μετρήσιμων συνόλων, δείξτε ότι

$$\int_{\cup_{n=1}^\infty E_n} f = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f.$$

3.7.9 Δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou υπάρχει περίπτωση να έχουμε αυστηρή ανισότητα.
Υπόδειξη: $f_n = \chi_{[n,n+1)}$.

3.7.10 Αν $f, f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμες και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

3.7.11 Αν $f, f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ μετρήσιμες και $f_n \to f$ σημειακά στο $\mathbb{R}$ και $f_n \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

3.7.12 Δίνονται μετρήσιμη συνάρτηση f και ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία $\{f_n\}$ μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$. Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[a, b]$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Υπόδειξη: Θεώρημα Egorov.

3.7.13 Υποθέτουμε ότι $f_n, f \in L^1$ και $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \to 0$. Δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} f = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n$ και $\int_{\mathbb{R}} |f| = \lim \int_{\mathbb{R}} |f_n|$.

3.7.14 Υποθέτουμε ότι $f_n, f \in L^1$ και $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \to 0$. Δείξτε ότι $\int_E f = \lim \int_E f_n$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ και ότι $\int_{\mathbb{R}} f_n^+ \to \int_{\mathbb{R}} f^+$.

3.7.15 Σωστό ή Λάθος;
Αν $f \in L^1(E_1)$ και $f \in L^1(E_2)$, τότε $f \in L^1(E_1 \cup E_2)$.

3.7.16 Δίνονται οι συναρτήσεις f_n, g_n, g όλες στον L^1. Υποθέτουμε ότι
(α) $f_n \to f$ σημειακά σχεδόν παντού,
(β) $g_n \to g$ σημειακά σχεδόν παντού,
(γ) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g_n$ σχεδόν παντού,
(δ) $\int_{\mathbb{R}} g_n \to \int_{\mathbb{R}} g$.
Δείξτε ότι $f \in L^1$ και ότι $\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f$.
(Υπόδειξη: Τροποποιήστε την απόδειξη του Θ.Κ.Σ.)

3.7.17 Έστω ότι $f_n, f \in L^1$ και $f_n \to f$ *σ.π.*. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| = \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

3.7.18 Έστω $f \in L^1$. Αν $\{E_n\}$ είναι μιά ακολουθία ξένων ανά δύο, μετρήσιμων συνόλων, και $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{E_n} f \right| \leq \int_E |f| < \infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f = \int_E f.$$

3.7.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in [0,1]$. Δείξτε με τον ορισμό τού ολοκληρώματος Lebesgue ότι $\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$.

3.7.20 Αν

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (1,2], \\ -4, & x \in [5,6], \\ -1, & x \in (6,7], \end{cases}$$

και $E = (1,2] \cup [5,7]$, υπολογίστε το $\int_E f$.

3.7.21 Δίνεται η συνάρτηση $f : (-2,3) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2,3) \cap \mathbb{Q}, \\ -4, & x \in (-2,3) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Υπολογίστε το $\int_{(-2,3)} f$.

3.7.22 Αν $E_1, E_2, \ldots, E_n$ είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ και αν κάθε σημείο τού $[0,1]$ ανήκει σε τρία τουλάχιστον από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$, δείξτε ότι για ένα τουλάχιστον από τα E_k ισχύει $m(E_k) \geq \frac{3}{n}$.

3.7.23 Δίνονται f, g μετρήσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $0 \leq f \leq g$.
(α) Αν $g \in L^1$, δείξτε ότι $f \in L^1$ και $g - f \in L^1$ και $\int_{\mathbb{R}}(g-f) = \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} f$.
(β) Δείξτε ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει και με την ασθενέστερη υπόθεση $f \in L^1$.

3.7.24 Δίνεται $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη. Αν $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ είναι μετρήσιμα σύνολα, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = \int_{\cup_n E_n} f.$$

3.7.25 Αν $g(x) = x^{-1/2}$, βρείτε το $\int_{(0,1)} g$.

3.7.26 Βρείτε μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ τέτοια ώστε $f_n \to 0$ σημειακά στο $\mathbb{R}$, αλλά $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$.

3.7.27 Έστω f μετρήσιμη με $f > 0$ σ.π. στο $\mathbb{R}$. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $m(E) = 0$.

3.7.28 Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ μετρήσιμη. Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f.$$

3.7.29 Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ μετρήσιμη και L^1. Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \leq n\}} f.$$

3.7.30 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ μετρήσιμη και $f \in L^1$, τότε $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
(β)Αν $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ συνεχής και $f \in L^1$, τότε $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
(γ) Αν $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ομοιόμορφα συνεχής και $f \in L^1$, τότε $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

3.7.31 Σωστό ή Λάθος; Αν $f, g \in L^1$, τότε $fg \in L^1$.

3.7.32 Συμπληρώστε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.5.3 και 3.5.4.

3.7.33 Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ μετρήσιμη και $f \in L^1$.
(α) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$E \in \mathcal{M},\ m(E) < \delta \Rightarrow \int_E f < \epsilon.$$

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.

3.7.34 Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in [0, 1/2] \setminus C, \\ \log x, & x \in (1/2, 1] \setminus C, \\ e^x, & x \in C, \end{cases}$$

όπου C το σύνολο τού Cantor. Υπολογίστε το $\int_0^1 f$.

3.7.35 Δείξτε ότι αν $f \in L^1(E)$ και $\{E_n\}$ είναι μιά ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων τού E με $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = 0.$$

3.7.36 Δείξτε ότι αν $f \in L^1(E)$ και $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot m(E_n) = 0.$$

3.7.37 Γιατί στο Παράδειγμα 3.6.1 δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.4.4;

3.7.38 Υποθέτουμε ότι οι f και f_n είναι μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις με τιμές στο $[0, +\infty)$, ότι $f_n \to f$ σημειακά και ότι $\int_{\mathbb{R}} f = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n < \infty$. Δείξτε ότι $\int_E f = \lim \int_E f_n$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$.
(Υπόδειξη: Εξετάστε τα E και E^c. Άλλος τρόπος: με χρήση τής Άσκησης 3.7.16).
Δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι η υπόθεση $\int_{\mathbb{R}} f = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n < \infty$ είναι απαραίτητη.

3.7.39 (α) Αν $f_n \in L^1[a, b]$ και αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, δείξτε ότι $f \in L^1[a, b]$ και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.
(β) Βρείτε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3.7.40 Σωστό ή Λάθος; Αν $f_n, f \in L^1$ και $f_1 \le f_2 \le f_3 \le \dots$ και $f_n \to f$ σημειακά στο $\mathbb{R}$, τότε $\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f$.

3.7.41 Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\, dx = 1.$$

(Υπόδειξη: η ακολουθία $(1 - \frac{x}{n})^n$ αυξάνει προς το e^{-x} όταν $n \to \infty$).

3.7.42 Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\, dx.$$

3.7.43 Σωστό ή Λάθος;
Αν $f \in L^1([a, 1])$ για κάθε $a \in (0, 1)$, τότε $f \in L^1((0, 1])$.

3.7.44 Αν $f \in L^1[0, 1]$, δείξτε ότι $x^n f(x) \in L^1[0, 1]$ για $n = 1, 2, \dots$ και υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

3.7.45 Υπολογίστε το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x\, dx.$$

3.7.46 Έστω $f_n \in L^1$ και $|f_n| \le g$ σχεδόν παντού, όπου $g \in L^1$. Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} (\liminf_{n\to\infty} f_n) \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \le \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \le \int_{\mathbb{R}} (\limsup_{n\to\infty} f_n).$$

3.7.47 Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f_n \ge -g$, όπου g θετική συνάρτηση στον L^1, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

(Τροποποίηση τού Λήμματος Fatou).

3.7.48 Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$, όπου $f_n(x) =$ (α) $\frac{nx}{1+n^2x^2}$, (β) $\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$,
(γ) $\frac{nx \log x}{1+n^2x^2}$.
(Υπόδειξη: $1 + n^2x^2 \ge 2nx$).

3.7.49 Βρείτε τα όρια: (α) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}\, dx$, (β) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n \cos x}{1+n^2x^{3/2}}\, dx$.

3.7.50 Βρείτε τα όρια:

$$(a) \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\,dx, \quad (b) \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\,dx,$$

$$(c) \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x/n)}{(1+x/n)^n}\,dx, \quad (d) \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx.$$

(Στο (d) η απάντηση εξαρτάται από την τιμή του a $(a>0,\ a=0,\ a<0)$).

3.7.51 Κατασκευάστε μιά ακολουθία $f_n \in L^1$ τέτοια ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, ενώ η ακολουθία $\int_{\mathbb{R}} |f_n|$ δεν συγκλίνει στο 0.

3.7.52* (α) Κατασκευάστε μιά ακολουθία $f_n \in L^1$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_n \to 0$, ενώ η ακολουθία f_n δεν συγκλίνει σχεδόν παντού στη μηδενική συνάρτηση.
(β) Κατασκευάστε μιά ακολουθία θετικών συναρτήσεων f_n τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_n \to 0$, ενώ η ακολουθία f_n δεν συγκλίνει σχεδόν παντού στη μηδενική συνάρτηση.

3.7.53 Δίνεται μιά ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι όλες ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[a,b]$ και ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n = (R)\int_a^b f.$$

3.7.54 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ για κάθε x τού συνόλου C τού Cantor και $f(x)=k$ για καθένα από τα διαστήματα τού $[0,1]\setminus C$ με μήκος $1/3^k$. Δείξτε ότι $\int_0^1 f = 3$.

3.7.55 Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}, \\ 6, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Βρείτε το $\int_0^1 f$.

3.7.56 Δείξτε ότι αν $f\in L^1(E)$ και

$$\left|\int_E f\right| = \int_E |f|,$$

τότε είτε $f\geq 0$ $\sigma.\pi.$ στο E είτε $f\leq 0$ $\sigma.\pi.$ στο E.

3.7.57 (**Ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα Lebesgue**). Αν η ϕ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και $f\in L^1[a,b]$, δείξτε ότι

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (\phi\circ f).$$

3.7.58 Έστω $f \in L^1$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\phi_n \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f - \phi_n| = 0.$$

3.7.59* Έστω $f(x) = x^{-1/2}\chi_{(0,1)}$. Έστω $\{r_n\}$ μιά αρίθμηση τού $\mathbb{Q}$. Θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x - r_n)}{2^n}.$$

Δείξτε ότι
(α) $g \in L^1$ και επομένως η g είναι σ.π. πεπερασμένη.
(β) Η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο τού $\mathbb{R}$ και μη φραγμένη σε κάθε διάστημα.
(γ) Η g^2 είναι σ.π. πεπερασμένη αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

3.7.60 Έστω $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n,\ \ x \in (0,1)$. Δείξτε ότι

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

3.7.61 Έστω $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$, όπου $0 < a < b$. Δείξτε ότι:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\, dx = \infty.$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx = 0.$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in L^1([0,\infty)) \quad \text{και} \quad \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \log \frac{b}{a}.$$

3.7.62 (α) Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

παραγωγίζοντας την ισότητα

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

παραγωγίζοντας την ισότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

3.7.63 Έστω $f \in L^1$. Για $t \in \mathbb{R}$, η **μεταφορά** τής f κατά t είναι η συνάρτηση $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f_t.$$

3.8 Σημειώσεις

Το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι σημαντικό για τούς ακόλουθους λόγους:
1. Είναι μιά πλούσια επέκταση τού ολοκληρώματος Riemann. Μπορούμε να ολοκληρώσουμε πολύ περισσότερες συναρτήσεις πάνω σε πολύ περισσότερα σύνολα.
2. Η θεωρία ολοκλήρωσης τού Lebesgue έχει ενοποιημένη, ολοκληρωμένη και σχεδόν τέλεια μορφή. Τα θεωρήματα μονότονης και κυριαρχούμενης σύγκλισης τής προσδίδουν τεράστια ευελιξία και εφαρμοσιμότητα.
3. Χάρη στο ολοκλήρωμα Lebesgue, το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού παίρνει μιά ξεκάθαρη και ολοκληρωμένη μορφή.
4. Με τη βοήθεια τού ολοκληρώματος Lebesgue ορίζονται οι χώροι L^p (μελετώνται στο επόμενο κεφάλαιο). Οι χώροι αυτοί είναι οι σημαντικότεροι χώροι συναρτήσεων και παίζουν σπουδαίο ρόλο σε όλους τού κλάδους τής Ανάλυσης.

Ο Henri Lebesgue (1875-1941) παρουσίασε τη θεωρία του σε μιά σειρά από άρθρα την περίοδο 1899-1902. Στη συνέχεια ασχολήθηκε με τη σχέση ολοκλήρωσης και παραγώγισης και με εφαρμογές τού ολοκληρώματός του στις σειρές Fourier. Στην ανάπτυξη τής θεωρίας τού ολοκληρώματος Lebesgue συνέβαλαν επίσης οι Borel, Vitali, Levi, Fatou, Young και άλλοι. Η εισαγωγή του ολοκληρώματος Lebesgue έδωσε τεράστια ώθηση στην Ανάλυση στον 20ο αιώνα. Η ιστορία των μαθηματικών ιδεών που οδήγησαν στο ολοκλήρωμα Lebesgue παρουσιάζεται λεπτομερώς στο βιβλίο [T.Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Developments*, 2nd edition, Chelsea 1975].

Ακολουθώντας το [2], παρουσιάσαμε τη θεωρία τού ολοκληρώματος Lebesgue βασιζόμενοι στις απλές συναρτήσεις. Παρόμοιες παρουσιάσεις που όλες οδηγούν στην ίδια θεωρία υπάρχουν σε όλα τα υπόλοιπα βιβλία τής Βιβλιογραφίας.

Ένα σημαντικό μέρος της θεωρίας τού Lebesgue αφορά τη σχέση παραγώγισης και ολοκλήρωσης και τη μορφή που παίρνει το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού με χρήση τού ολοκληρώματος Lebesgue. Στο θέμα αυτό εμφανίζεται με ουσιαστικό τρόπο η έννοια τής απόλυτης συνέχειας. Εδώ δεν θίξαμε καθόλου αυτά τα θέματα καθώς πιστεύουμε ότι αντιμετωπίζονται καλύτερα σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Παραπέμπουμε, λοιπόν, στο [3] και στο [W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGrow-Hill 1987].

Οι συναρτήσεις Γ και ζ είναι από τις πιο σημαντικές **ειδικές συναρτήσεις**. Εμφανίζονται σε μιά πληθώρα μαθηματικών προβλημάτων και έχουν μελετηθεί εξαντλητικά επί αιώνες. Οι Γ και ζ επεκτείνονται αναλυτικά σε τόπους τού μιγαδικού επιπέδου και παίζουν σπουδαίο ρόλο και στη Μιγαδική Ανάλυση. Η μιγαδική συνάρτηση

ζ είναι εξαιρετικά σημαντική και στη Θεωρία Αριθμών. Η περίφημη εικασία τού Riemann για τις ρίζες της παραμένει ανοικτή από το 19ο αιώνα και είναι ένα από τα πιό σημαντικά και δύκολα ανοικτά προβλήματα των Μαθηματικών. Περισσότερα για τις συναρήσεις αυτές υπάρχουν στα [1], [7], καθώς και στα βιβλία για ειδικές συναρτήσεις, όπως το [N.N. Lebedev, *Special Functions and Their Applcations*, Dover Publ. 1972]. Ιστορικά στοιχεία υπάρχουν στο άρθρο [P.J. Davis, *Leohnard Euler's integral: A historical profile of the gamma function*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 849-869] και στο βιβλίο [H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press 1969].

Κεφάλαιο 4

Οι χώροι L^p

4.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Έχουμε ήδη ορίσει το χώρο L^1. Είναι ο χώρος όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε όλους τούς χώρους L^p, $0 < p \leq \infty$.

Αν f είναι μιά μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $E \subset \mathbb{R}$ και $0 < p < \infty$, θέτουμε
$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p}.$$

Ορισμός 4.1.1 Έστω ότι $0 < p < \infty$ και ότι E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Λέμε ότι μιά μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ανήκει στο χώρο $L^p(E)$, αν $|f|^p \in L^1(E)$, δηλαδή αν
$$\int_E |f|^p < \infty.$$

Αν $E = \mathbb{R}$, γράφουμε $L^p(E) = L^p$. Για την ποσότητα $\|f\|_p$ χρησιμοποιούνται επίσης οι συμβολισμοί $\|f\|_{L^p}$ και $\|f\|_{L^p(E)}$.

Πρόταση 4.1.2 *Υποθέτουμε ότι $0 < p < \infty$, $f, g \in L^p(E)$ και $c \in \mathbb{R}$. Τότε*
(α) *$cf \in L^p(E)$ και $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$.*
(β) *$\|f\|_p = 0$ αν και μόνο $f = 0$ σ.π..*
(γ) *$f + g \in L^p(E)$.*

Απόδειξη.
Το (α) προκύπτει άμεσα από το ορισμό. Το (β) είναι άμεση συνέπεια της

Πρότασης 3.3.6. Το (γ) ισχύει διότι

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq |\max\{|f|,|g|\}+\max\{|f|,|g|\}|^p = (2\max\{|f|,|g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|^p,|g|^p\} \leq 2^p(|f|^p+|g|^p). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 4.1.3 Κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο E πεπερασμένου μέτρου, ανήκει στον $L^p(E)$. Πράγματι, έστω ότι η f είναι μετρήσιμη στο E, $m(E)<\infty$ και $|f|\leq M$ στο E. Τότε για $0<p<\infty$,

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \leq M\, m(E)^{1/p} < \infty.$$

Παράδειγμα 4.1.4 Έστω $0<r<\infty$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^{-r}$, $x\in(0,\infty)$. Θέτουμε επίσης $g=f\chi_{(0,1)}$ και $h=f\chi_{(1,\infty)}$. Για $p=1/r$, ισχύει

$$(R)\int_{\mathbb{R}} g^p = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Επίσης για $p\neq 1/r$,

$$(R)\int_{\mathbb{R}} g^p = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 g^p = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-pr}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{pr-1}}\right).$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $(R)\int_{\mathbb{R}} g^p$ υπάρχει αν και μόνο αν $p<1/r$. Από το Θεώρημα 3.5.4 (δ), η g ανήκει στον L^p αν και μόνο αν $p<1/r$. Επίπλέον για $p<1/r$, $\|g\|_p=(1-pr)^{-1/p}$.

Παρομοίως για την h χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.5.4 (α) και βρίσκουμε ότι η h ανήκει στον L^p αν και μόνο αν $p>1/r$. Για τέτοια p, ισχύει $\|h\|_p = (rp-1)^{-1/p}$.

Η f δεν ανήκει στον $L^p(0,\infty)$ για κανένα p, διότι αν $f\in L^p(0,\infty)$ τότε $g\in L^p$ και $h\in L^p$.

Παράδειγμα 4.1.5 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+|\log x|)},\quad x\in(0,\infty).$$

Θα δείξουμε ότι $f\in L^2((0,\infty))$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+|\log x|)^2} < \infty.$$

Γράφουμε

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+|\log x|)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x(1-\log x)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{x(1+\log x)^2} + \int_2^\infty \frac{dx}{x(1+\log x)^2}.$$

Το ολοκλήρωμα

$$(R)\int_1^2 \frac{dx}{x(1+\log x)^2}$$

είναι πεπερασμένο διότι

$$\frac{1}{x(1+\log x)^2} \leq \frac{1}{x}.$$

Για το ολοκλήρωμα

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(1+\log x)^2}$$

εργαζόμαστε ως εξής: Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{x(1+\log x)^2} \leq \frac{1}{x(\log x)^2}$$

και στη συνέχεια κάνοντας την αλλάγή μεταβλητής $u = \log x$, διαπιστώνουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$(R)\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}$$

είναι πεπερασμένο. Άρα το $(R)\int_1^\infty f$ είναι πεπερασμένο. Από το Θεώρημα 3.5.4 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+\log x)^2} < \infty.$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f$ χρησιμοποιούμε πάλι το Θεώρημα 3.5.4 και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = 1/x$ η οποία ανάγει το ολοκλήρωμα $(R)\int_0^1 f$ στο ολοκλήρωμα $(R)\int_1^\infty f$, το οποίο έχουμε ήδη μελετήσει.

4.2 Οι ανισότητες Hölder και Minkowski

Λήμμα 4.2.1 *Αν $a \geq 0$, $b \geq 0$ και $0 < \lambda < 1$, τότε*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b. \tag{4.1}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a = b$.

Απόδειξη.
Αν $b = 0$, η (4.2.1) είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $b > 0$. Θέτουμε $t = a/b$. Η (4.1) γράφεται $t^\lambda - \lambda t \leq 1 - \lambda$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(t) = t^\lambda - \lambda t$. Η ϕ έχει μέγιστο μόνο στο σημείο $t = 1$. Άρα $\phi(t) \leq \phi(1) = 1 - \lambda$ με ισότητα αν και μόνο αν $t = 1$. □

Θεώρημα 4.2.2 (**Ανισότητα Hölder**) *Υποθέτουμε ότι* $1 < p < \infty$ *και* $1/p + 1/q = 1$, *δηλαδή* $q = p/(p-1)$. *Αν* $f \in L^p(E)$ *και* $g \in L^q(E)$, *τότε* $fg \in L^1(E)$ *και*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q. \tag{4.2}$$

Απόδειξη.
Περίπτωση 1: $\|f\|_p = 0$ ή $\|g\|_q = 0$.
Τότε $f = 0$ *σ.π.* ή $g = 0$ *σ.π.* και η ανισότητα (4.2) είναι προφανής.

Περίπτωση 2: $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.
Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.2.1 με $a = |f(x)|^p$, $b = |g(x)|^q$ και $\lambda = 1/p$, και παίρνουμε

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q, \quad x \in E.$$

Ολοκληρώνουμε στο E και προκύπτει

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &\leq \frac{1}{p}\int_E |f|^p + \frac{1}{q}\int_E |g|^q = \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q. \end{aligned}$$

Περίπτωση 3: Γενική περίπτωση.
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $F = f/\|f\|_p$, $G = g/\|g\|_q$. Ισχύει $\|F\|_p = \|G\|_q = 1$. Εφαρμόζουμε την Περίπτωση 2:

$$\|FG\|_1 = \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \|F\|_p\|G\|_q = 1.$$

Άρα

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

□

Για $p = q = 2$, η ανισότητα Hölder γράφεται

$$\int_E |fg| \leq \left(\int_E f^2\right)^{1/2} \left(\int_E g^2\right)^{1/2}$$

και ονομάζεται ανισότητα **Cauchy-Schwarz**.

Θεώρημα 4.2.3 (**Ανισότητα Minkowski**) *Αν* $1 \le p < \infty$ *και* $f, g \in L^p(E)$, *τότε* $f + g \in L^p(E)$ *και*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.3}$$

Απόδειξη.
Από την Πρόταση 4.1.2 είναι γνωστό ότι $f + g \in L^p(E)$. Αν $f + g = 0$ σ.π., η ανισότητα είναι προφανής. Επίσης, αν $p = 1$, τότε η (4.3) είναι τετριμμένη:

$$\|f+g\|_1 = \int_E |f+g| \le \int_E (|f|+|g|) = \int_E |f| + \int_E |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $1 < p < \infty$ και ότι η $f + g$ δεν είναι ισοδύναμη με τη μηδενική συνάρτηση. Θέτουμε $q = p/(p-1)$. Λόγω της ανισότητας Hölder,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_E |f+g|^p = \int_E |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \\
&\le \int_E |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int_E |g| \cdot |f+g|^{p-1} \\
&\le \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\int_E |g|^p\right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \, \|f+g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Διαιρούμε με $\|f+g\|_p^{p-1}$ και προκύπτει η (4.3). □

Οι ανισότητες Hölder και Minkowski είναι από τις σημαντικότερες στην Ανάλυση. Η ανισότητα Minkowski λέει ότι η $\|f\|_p$ ικανοποιεί τη τριγωνική ανισότητα για $1 \le p < \infty$ και επομένως, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, οι χώροι L^p καθίστανται νορμικοί χώροι. Η ανισότητα Hölder είναι εξαιρετικά εύχρηστη και χρήσιμη. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} F$, αρκεί να γράψουμε την F στη μορφή $F = fg$ και να επιλέξουμε p, q ώστε $q = p/(p-1)$, $f \in L^p$, $g \in L^q$. Σε πολλές περιπτώσεις, η έξυπνη παραγοντοποίηση $F = fg$ και η κατάλληλη επιλογή τού p είναι το κλειδί τής απόδειξης σημαντικών θεωρημάτων.

4.3 Η πληρότητα των χώρων L^p

Θυμίζουμε τον ορισμό τού νορμικού χώρου. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$. Μιά συνάρτηση $x \mapsto \|x\|$ από το X στο $[0, \infty)$

ονομάζεται **νόρμα**, αν έχει τις ακόλουθες τρείς ιδιότητες:
(α) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
(β) $\|cx\| = |c|\,\|x\|, \ \ \forall x \in X, \forall c \in \mathbb{R}$.
(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$ (**τριγωνική ανισότητα**).

Ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με νόρμα ονομάζεται **νορμικός χώρος**.

Έστω ότι $1 \leq p < \infty$ και $E \in \mathcal{M}$. Αν δύο συναρτήσεις τού $L^p(E)$ είναι ίσες *σ.π.*, τότε τις ταυτίζουμε και τις θεωρούμε ίσες. Με τη σύμβαση αυτή, λόγω της Πρότασης 4.1.2 και της ανισότητας Minkowski, η $\|f\|_p$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α), (β), (γ). Επομένως ο $L^p(E)$ είναι νορμικός χώρος.

Η παραπάνω 'ταυτοποίηση' των *σ.π.* ίσων συναρτήσεων γίνεται αυστηρά ως εξής: Όπως έχουμε δεί, η σχέση $f \sim g$ (δηλ. $f = g$ *σ.π.*) είναι σχέση ισοδυναμίας. Ορίζουμε $L^p(E)$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Ο $L^p(E)$ εύκολα γίνεται διανυσματικός χώρος. Για παράδειγμα, το άθροισμα δύο κλάσεων ορίζεται να είναι η κλάση τού αθροίσματος δύο αντιπροσώπων των κλάσεων. Στον $L^p(E)$, ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p}, \ \ 1 \leq p < \infty,$$

χρησιμοποιώντας έναν αντιπρόσωπο f. Επειδή οι *σ.π.* ίσες συναρτήσεις έχουν ίσα ολοκληρώματα, είναι φανερό ότι η νόρμα είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί τις ιδιότητες (α), (β), (γ). Στην πράξη δεν αναφερόμαστε σε κλάσεις ισοδυναμίας αλλά απλώς χειριζόμαστε τις *σ.π.* ίσες συναρτήσεις ως ίσες.

Κάθε νορμικός χώρος X είναι και μετρικός με απόσταση (μετρική) $d(x, y) = \|x - y\|$. Με χρήση της μετρικής μπορούμε να ορίσουμε στο X όλες τις έννοιες της Μετρικής Τοπολογίας (σφαιρικές περιοχές, σημεία συσσώρευσης, σύγκλιση και συνέχεια συναρτήσεων, σύγκλιση ακολουθιών και σειρών κλπ). Λέμε ότι μιά σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ στο X *συγκλίνει απολύτως* αν η σειρά (θετικών πραγματικών αριθμών) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ συγκλίνει.

Έστω $\{f_n\}$ μιά ακολουθία στον $L^p(E)$. Λέμε ότι η $\{f_n\}$ *συγκλίνει στον* $L^p(E)$ προς μιά συνάρτηση $f \in L^p(E)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = \lim_{n\to\infty} d_p(f_n, f) = 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι οι χώροι L^p είναι χώροι Banach, δηλαδή πλήρεις νορμικοί χώροι. Θυμίζουμε ότι ένας νορμικός χώρος X ονομάζεται **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy στο X είναι συγκλίνουσα. Χρήσιμο είναι το ακόλουθο κριτήριο πληρότητας.

Λήμμα 4.3.1 *Ένας νορμικός χώρος X είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στο X συγκλίνει.*

Απόδειξη.
Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι απολύτως συγκλίνουσα. Θέτουμε $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$. Τότε για $N > M$,

$$\|S_N - S_M\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\| \to 0, \text{ όταν } M, N \to \infty.$$

Άρα η ακολουθία $\{S_N\}$ είναι Cauchy, επομένως και συγκλίνουσα.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στο X συγκλίνει. Έστω $\{x_n\}$ μιά ακολουθία Cauchy στο X. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy για $\varepsilon = 1/2, 1/8, 1/16, \ldots$, βρίσκουμε φυσικούς αριθμούς $n_1 < n_2 < \ldots$ έτσι ώστε

$$\forall n, m \geq n_j, \ \ \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Θέτουμε $y_1 = x_{n_1}$ και $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ για $j > 1$. Τότε

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\| \leq \|y_1\| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \|y_1\| + 1 < \infty.$$

Επομένως η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και συγκλίνουσα. Όμως $\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_k}$. Άρα η $\{x_n\}$ που είναι ακολουθία Cauchy έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x_{n_k}\}$. Τότε και η ίδια η $\{x_n\}$ είναι συγκλίνουσα· αυτό αποδεικνύεται εύκολα όπως και για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$. $\square$

Θεώρημα 4.3.2 **(Riesz-Fisher)** *Αν $1 \leq p < \infty$ και $E \in \mathcal{M}$, ο χώρος $L^p(E)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ο $L^p(E)$ είναι πλήρης. Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.3.1. Έστω $\{f_n\}$ μιά ακολουθία στον $L^p(E)$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = B < \infty.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει στον $L^p(E)$. Θέτουμε

$$G_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n| \quad \text{και} \quad G = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

Από την ανισότητα Minkowski,

$$\|G_N\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = B < \infty, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Έτσι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δίνει

$$\int_E G^p = \int_E (\lim_{N\to\infty} G_N^p) = \lim_{N\to\infty} \int_E G_N^p = \lim_{N\to\infty} \|G_N\|_p^p \leq B^p.$$

Άρα $G \in L^p(E)$ κι επομένως η G είναι σ.π. πεπερασμένη στο E. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σ.π. στο E. Θέτουμε $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Προφανώς $|F| \leq G$. Άρα $F \in L^p(E)$. Επιπλέον

$$\left| F - \sum_{n=1}^{N} f_n \right|^p \leq (2G)^p \in L^1(E).$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης:

$$\lim_{N\to\infty} \left\| F - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_p^p = \lim_{N\to\infty} \int_E \left| F - \sum_{n=1}^{N} f_n \right|^p = \int_E \lim_{N\to\infty} \left| F - \sum_{n=1}^{N} f_n \right|^p = 0.$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει στον $L^p(E)$ προς τη συνάρτηση F. $\square$

Μιά ακολουθία συναρτήσεων μπορεί να συγκλίνει σημειακά αλλά να μη συγκλίνει στον L^p. Μπορεί επίσης να συγκλίνει στον L^p αλλά να μη συγκλίνει σημειακά.

Παράδειγμα 4.3.3 Η ακολουθία $f_n = \chi_{(n,n+1)}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς τη μηδενική συνάρτηση. Όμως για κάθε $p \in [1, \infty)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_p = 1$.

Παράδειγμα 4.3.4 Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned}
f_1 &= \chi_{[0,1]}, \\
f_2 &= \chi_{[0,1/2]}, \quad f_3 = \chi_{[1/2,1]}, \\
f_4 &= \chi_{[0,1/4]}, \quad f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}, \quad f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}, \quad f_7 = \chi_{[3/4,1]}, \\
f_8 &= \chi_{[0,1/16]}, \quad f_9 = \chi_{[1/16,2/16]}, \quad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| = \frac{1}{2^k}, \quad \text{όταν } 2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

Άρα η $\{f_n\}$ συγκλίνει στον L^1 προς τη μηδενική συνάρτηση. Η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα η ακολουθία αριθμών $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [0,1]$ διότι υπάρχουν άπειρα n για τα οποία $f_n(x) = 0$ και άπειρα n για τα οποία $f_n(x) = 1$.

Αν $f_n \to f$ σ.π. και $|f_n| \leq g \in L^p$, τότε $|f_n - f| \leq 2g$ και το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης δίνει $\|f_n - f\|_p \to 0$, δηλαδή $f_n \to f$ στον L^p. Από την άλλη μεριά, η σύγκλιση στον L^p συνεπάγεται την σ.π. σύγκλιση μιάς υπακολουθίας, όπως δείχνει το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.3.5 *Αν $f_n \to f$ στον $L^p(E)$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ τέτοια ώστε $f_{n_k} \to f$ σ.π..*

Απόδειξη.
Από την υπόθεση, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό τού ορίου για $\varepsilon = 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ τέτοια ώστε

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|f_{n_k} - f\|_p^p < \frac{1}{2^k}.$$

Από το Θεώρημα Levi,

$$\begin{aligned} \int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f|^p \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_{n_k} - f|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f\|_p^p \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty. \end{aligned}$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f|^p$ συγκλίνει σ.π.. Επομένως $f_{n_k} \to f$ σ.π.. □

4.4 Ο χώρος L^∞

Ορισμός 4.4.1 Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η f ανήκει στο χώρο $L^\infty(E)$, αν υπάρχει $M \geq 0$ τέτοιο ώστε $|f| \leq M$ σ.π. στο E. Ο χώρος $L^\infty(E)$ είναι ο χώρος των **ουσιαστικά φραγμένων** συναρτήσεων στο E. Θέτουμε $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R})$.

Έστω $f \in L^\infty(E)$. Τότε το σύνολο

$$S = \{M \geq 0 : m(\{|f| > M\}) = 0\}$$

δεν είναι το κενό. Θέτουμε $s = \inf S$. Τότε είτε $S = (s, \infty)$, είτε $S = [s, \infty)$. Θα δείξουμε ότι $s \in S$, δηλαδή $S = [s, \infty)$. Ισχύει

$$\{|f| > s\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| > s + \frac{1}{n}\}$$

και

$$m(\{|f| > s + \frac{1}{n}\}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα $m(\{|f| > s\}) = 0$. Επομένως $s \in S$, δηλαδή το σύνολο S έχει ελάχιστο. Θέτουμε

$$\|f\|_\infty = \min\{M \geq 0 : m(\{|f| > M\}) = 0\}.$$

Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **ουσιαστικό supremum** της f. Αν $f \in L^\infty(E)$, τότε το σύνολο $A = \{|f| > \|f\|_\infty\}$ έχει μέτρο μηδέν. Έτσι αν ορίσουμε $f_1 = f\chi_{E \setminus A}$, τότε $f \sim f_1$ και

$$\|f\|_\infty = \|f_1\|_\infty = \sup |f_1|.$$

Δηλαδή κάθε ουσιαστικά φραγμένη συνάρτηση f είναι ισοδύναμη με μιά φραγμένη συνάρτηση f_1. Το ουσιαστικό supremum τής f είναι ίσο με το supremum τής f_1. Επίσης είναι φανερό ότι αν $f \in L^\infty(E)$ και $A \subset E$ με $m(A) = 0$, τότε

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{E \setminus A} |f|.$$

Θεώρημα 4.4.2 *Ο χώρος $L^\infty(E)$ εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_\infty$ είναι νορμικός χώρος.*

Απόδειξη.
Έστω ότι $c \in \mathbb{R}$, $f \in L^\infty(E)$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$. Αν $\|f\|_\infty = 0$, τότε

$$m(\{|f| > 0\}) = 0.$$

Συνεπώς $f = 0$ *σ.π.*. Και για τις ουσιαστικά φραγμένες συναρτήσεις κάνουμε τη σύμβαση ότι δυό συναρτήσεις που είναι *σ.π.* ίσες θεωρούνται ίσες.

Τέλος αποδεικνύουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Αν $f, g \in L^\infty(E)$, τότε θεωρούμε συναρτήσεις f_1, g_1 τέτοιες ώστε $f_1 \sim f$, $g_1 \sim g$, και $\|f\|_\infty = \sup |f_1|$, $\|g\|_\infty = \sup |g_1|$. Τότε $f + g \sim f_1 + g_1$ και

$$\|f+g\|_\infty = \|f_1+g_1\|_\infty \leq \sup(|f_1|+|g_1|) \leq \sup |f_1| + \sup |g_1| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

$\square$

Το επόμενο θεώρημα λέει ότι η σύγκλιση στον L^∞ ταυτίζεται με την $\sigma.\pi.$ ομοιόμορφη σύγκλιση.

Θεώρημα 4.4.3 *Δίνονται συναρτήσεις $f, f_n \in L^\infty(E)$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει στον $L^\infty(E)$ προς την f αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο $A \subset E$ τέτοιο ώστε $m(A) = 0$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $E \setminus A$.*

Απόδειξη.
Θέτουμε $g_n = f_n - f$, $A_n = \{|g_n| > \|g_n\|_\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ και $A = \cup_n A_n$. Ισχύει $m(A_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $m(A) = 0$. Αν $f_n \to f$ στον $L^\infty(E)$, τότε

$$\sup_{E\setminus A} |f_n - f| = \sup_{E\setminus A} |g_n| \leq \sup_{E\setminus A_n} |g_n| = \|g_n\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty \to 0, \text{ όταν } n \to \infty.$$

Άρα $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $E \setminus A$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ σε ένα σύνολο $E \setminus A$ με $m(A) = 0$. Τότε

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{E\setminus A} |f_n - f| \to 0, \text{ όταν } n \to \infty.$$

Άρα $f_n \to f$ στον $L^\infty(E)$. $\square$

Θεώρημα 4.4.4 *Ο $L^\infty(E)$ είναι χώρος Banach .*

Απόδειξη.
Έστω $\{f_n\}$ μιά ακολουθία Cauchy στον $L^\infty(E)$. Θεωρούμε τα σύνολα $A_k = \{|f_k| > \|f_k\|_\infty\}$ και $B_{n,m} = \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$, $k, n, m \in \mathbb{N}$. Έστω A η ένωση όλων αυτών των συνόλων. Τότε $m(A) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall m, n \geq n_o, \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Επομένως

$$\forall m, n \geq n_o, \ \forall x \in E \setminus A \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης τού Cauchy, η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $E\setminus A$ προς μιά συνάρτηση f. Επειδή όλες οι f_n είναι φραγμένες στο $E \setminus A$, η f είναι κι αυτή φραγμένη στο $E \setminus A$. Άρα $f \in L^\infty(E)$. Λόγω τού Θεωρήματος 4.4.3, $f_n \to f$ στον $L^\infty(E)$. $\square$

4.5 $*$ Θεωρήματα προσέγγισης

Στην παράγραγο αυτή θα αποδείξουμε μερικά θεωρήματα προσέγγισης για συναρτήσεις στους χώρους L^p. Πιό συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι για μιά συνάρτηση $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, υπάρχει μιά άλλη συνάρτηση g που είναι απλούστερη ή έχει επιπλέον ιδιότητες (απλή, κλιμακωτή, συνεχής) και η απόσταση στον L^p μεταξύ f και g είναι όσο μικρή θέλουμε. Τέτοιου είδους θεωρήματα είναι εξαιρετικά χρήσιμα σε πολλούς κλάδους τής Ανάλυσης (αρμονική, συναρτησιακή κ.α.).

Θεώρημα 4.5.1 *Έστω $f \in L^p[a,b]$, $1 \leq p < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει απλή συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε*

$$\|f - \phi\|_p < \varepsilon.$$

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 2.5.1 υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες θετικών απλών συναρτήσεων $\{\phi_n^{(1)}\}$ και $\{\phi_n^{(2)}\}$ τέτοιες ώστε

$$\phi_n^{(1)} \xrightarrow{\sigma} f^+, \qquad \phi_n^{(2)} \xrightarrow{\sigma} f^- \qquad \text{στο} \quad [a,b].$$

Θέτουμε $\phi_n = \phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Η $\{\phi_n\}$ είναι ακολουθία απλών συναρτήσεων και $|\phi_n| \leq |f|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης $|\phi_n - f|^p \xrightarrow{\sigma} 0$ στο $[a,b]$ και

$$|\phi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in L^1[a,b].$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} |\phi_n - f|^p = 0.$$

Άρα για δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_o$,

$$\|\phi_n - f\|_p^p = \int_{[a,b]} |\phi_n - f|^p < \varepsilon^p.$$

Θέτουμε $\phi = \phi_{n_o}$ και έχουμε $\|\phi - f\|_p < \varepsilon$. □

Θα δείξουμε τώρα ότι μιά συνάρτηση που ανήκει στο χώρο $L^p[a,b]$ μπορεί να προσεγγιστεί στο χώρο αυτό από μιά κλιμακωτή συνάρτηση. Θυμίζουμε ότι μιά συνάρτηση $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται κλιμακωτή αν υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_m = b\}$ τέτοια ώστε η ψ να είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα (x_{i-1}, x_i). Οι κλιμακωτές συναρτήσεις αποτελούν μιά ειδική κατηγορία απλών συναρτήσεων.

Θεώρημα 4.5.2 *Έστω $f \in L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση ψ τέτοια ώστε*

$$\|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

Απόδειξη.

Βήμα 1: Αποδεικνύουμε πρώτα το Θεώρημα όταν $f = \chi_E$, όπου E ένα μετρήσιμο υποσύνολο τού $[a,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω τού Θεωρήματος 1.4.4, υπάρχει ανοικτό σύνολο A τέτοιο ώστε $E \subset A$ και $m(A \setminus E) < \varepsilon^p/2^p$. Το A είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων (a_j, b_j). Επομένως

$$m(A) = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) = m(E) + m(A \setminus E) < m(E) + \frac{\varepsilon^p}{2^p}. \tag{4.4}$$

Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)$ συγκλίνει. Άρα υπάρχει φυσικός N τέτοιος ώστε

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}(b_j - a_j) < \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Έστω ψ η χαρακτηριστική συνάρτηση τού συνόλου $\cup_{j=1}^{N}(a_j, b_j)$. Προφανώς η ψ είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski και την (4.4), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\chi_E - \psi\|_p &\le \|\chi_E - \chi_A\|_p + \|\chi_A - \psi\|_p \\
&\le m(A \setminus E)^{1/p} + m\left(\cup_{j=N+1}^{\infty}(a_j, b_j)\right)^{1/p} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Βήμα 2: Στο Βήμα αυτό θα αποδείξουμε το θεώρημα για f απλή συνάρτηση. Έστω

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

η κανονική παράσταση τής f. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Βήμα 1, υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ τέτοιες ώστε

$$\|\chi_{E_j} - \psi_j\|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n}|a_j|}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Θέτουμε

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j.$$

Η ψ είναι κλιμακωτή συνάρτηση και ισχύει

$$\|f-\psi\|_p \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \|\chi_{E_j} - \psi_j\|_p < \varepsilon.$$

Βήμα 3: Τέλος αποδεικνύουμε το θεώρημα για τυχούσα $f \in L^p[a,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 4.5.1, υπάρχει απλή συνάρτηση ϕ με $\|f-\phi\|_p < \varepsilon/2$. Από το Βήμα 2, υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση ψ με $\|\phi-\psi\|_p < \varepsilon/2$. Άρα

$$\|f-\psi\|_p \leq \|f-\phi\|_p + \|\phi-\psi\|_p < \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 4.5.3 *Έστω $f \in L^p[a,b]$, $1 \leq p < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση g τέτοια ώστε*

$$\|f-g\|_p < \varepsilon.$$

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 4.5.2, υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση ψ τέτοια ώστε $\|f-\psi\| < \varepsilon/2$. Θέτουμε

$$M = \sup\{|\psi(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Κατασκευάζουμε με τον προφανή τρόπο μιά τμηματικά αφινική συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$m\left(\{x \in [a,b] : \psi(x) \neq g(x)\}\right) < \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^p$$

και $|g(x)| \leq M$. Τότε

$$\|\psi - g\|_p = \left(\int_{[a,b]} |\psi - g|^p\right)^{1/p} \leq ((2M)^p m(\psi \neq g))^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα

$$\|f-g\|_p \leq \|f-\psi\|_p + \|\psi-g\|_p < \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 4.5.4 *Έστω $f \in L^p(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$ και $1 \le p < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση g η οποία είναι ίση με 0 έξω από ένα φραγμένο διάστημα και ισχύει*

$$\|f - g\|_{L^p(E)} < \varepsilon.$$

Απόδειξη.
Επεκτείνουμε την f στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $f = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus E$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω τού Θεωρήματος 4.5.3, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$\|f - h\|_{L^p[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5}$$

Έστω

$$M = \max\{|h(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Θα κατασκευάσουμε τώρα συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τροποποιώντας την h. Έστω $\delta > 0$ μικρός θετικός αριθμός. Η g ορίζεται ως εξής:
(α) $g = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.
(β) $g = h$ στο $[a + \delta, b - \delta]$.
(γ) Η g είναι αφινική σε καθένα από τα διαστήματα $[a, a + \delta]$, $[b - \delta, b]$ και επίσης είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Ο αριθμός δ επιλέγεται αρκετά μικρός έτσι ώστε

$$\|h - g\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |h - g|^p\right)^{1/p} \le ((2M)^p\, 2\delta)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{L^p(E)} &= \left(\int_E |f - g|^p\right)^{1/p} = \left(\int_{E \cap [a,b]} |f - g|^p\right)^{1/p} \\
&\le \left(\int_{[a,b]} |f - g|^p\right)^{1/p} = \|f - g\|_{L^p[a,b]} \\
&\le \|f - h\|_{L^p[a,b]} + \|h - g\|_{L^p[a,b]} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Έτσι το Θεώρημα αποδείχθηκε στην Περίπτωση 1.

Περίπτωση 2: Δεν υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρήσεων $f_n = f\chi_{[-n,n]}$. Ισχύει $f_n \in L^p(E)$, $n \in \mathbb{N}$, $|f_n|^p \leq |f|^p \in L^1(E)$ και $f_n \to f$ στο E. Από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p = \int_E |f|^p.$$

Από την Άσκηση 4.6.9, $f_n \to f$ στο χώρο $L^p(E)$, δηλαδή $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0$. Επιλέγουμε n_o αρκούντως μεγάλο ώστε να έχουμε

$$\|f - f_{n_o}\|_{L^p(E)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την Περίπτωση 1, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ίση με 0 έξω από το διάστημα $[-n_o, n_o]$ και

$$\|f_{n_o} - g\|_{L^p(E)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τελικά λοιπόν

$$\|f - g\|_{L^p(E)} \leq \|f - f_{n_o}\|_{L^p(E)} + \|f_{n_o} - g\|_{L^p(E)} < \varepsilon.$$

□

4.6 Ασκήσεις

4.6.1 Αν $f \in L^p$ και $E \in \mathcal{M}$, δείξτε ότι ο περιορισμός τής f στο E ανήκει στο χώρο $L^p(E)$.

4.6.2 Έστω $f(x) = 1/x$. Εξετάστε για ποιά $p \in (0,\infty)$, συναρτήσεις $f, f\chi_{(0,1)}$, $f\chi_{(1,\infty)}$, $f\chi_{[1,2]}$ ανήκουν στον L^p.

4.6.3 Έστω $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\log x|)^{-1}$. Δείξτε ότι $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = 2$.

4.6.4 Έστω $f \in L^p$, $0 < p < \infty$. Δείξτε ότι για $\alpha > 0$, ισχύει

$$m(\{|f| > \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p < \infty.$$

4.6.5 Τί λέει το Λήμμα 4.2.1 για $\lambda = \frac{1}{2}$;

4.6.6 Δείξτε ότι στην ανισότητα Hölder, ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί c_1, c_2, όχι και οι δύο ίσοι με το μηδέν, τέτοιοι ώστε $c_1|f|^p = c_2|g|^q$ σ.π..

4.6.7 Εξετάστε πότε ισχύει η ισότητα στην ανσότητα Minkowski.
Υπόδειξη: Η απάντηση είναι διαφορετική για $p = 1$ και για $1 < p < \infty$.

4.6.8 Έστω $E \in \mathcal{M}$ με $m(E) < \infty$. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε

$$E_n = \{n - 1 \leq |f| < n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $f \in L^p(E)$, $0 < p < \infty$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p m(E_n) < \infty.$$

4.6.9 Υποθέτουμε ότι $1 \leq p < \infty$, $f_n, f \in L^p$ και $f_n \to f$ σ.π.. Δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \Leftrightarrow \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Υπόδειξη: Άσκηση 3.7.16

4.6.10 Αν $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $f_n \to f$ στον L^p και $g_n \to g$ στον L^q, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον L^1.

4.6.11 Αν $f_n \to f$ στον $L^p(E)$ και $f_n \to g$ σ.π. στο E, τότε $f = g$ σ.π. στο E.

4.6.12 Δίνονται μετρήσιμο σύνολο E με $m(E) < \infty$ και αριθμοί r, s με $0 < r < s < \infty$.
(α) Αν η $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \, m(E)^{1/r - 1/s}.$$

(β) Δείξτε ότι $L^s(E) \subset L^r(E)$.
(γ) Δείξτε ότι $L^s([0,1]) \neq L^r([0,1])$.

4.6.13 Έστω ότι $0 < p < \infty$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^{-1/p}(1 + |\log x|)^{-2/p}, & x > 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $f \in L^p \setminus L^q$ για $q \neq p$.

4.6.14 Έστω ότι $0 < p < q < \infty$. Βρείτε συναρτήσεις $f \in L^p \setminus L^q$ και $g \in L^q \setminus L^p$.

4.6.15 Έστω $1 \leq p < \infty$. Βρείτε συναρτήσεις $f, g \in L^p$ τέτοιες ώστε $fg \notin L^p$.

4.6.16 Έστω ότι $0 < p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L^q$ γράφεται ως άθροισμα μιάς συνάρτησης τού L^p και μιάς συνάρτησης τού L^r.
Υπόδειξη: Αν $E = \{|f| > 1\}$, $g = f\chi_E$ και $h = f\chi_{E^c}$.

4.6.17 Δείξτε ότι αν $f \in L^s \cap L^r$, $0 < r < s < \infty$, τότε $f \in L^p$ για κάθε $p \in [r, s]$.

4.6.18 (α) Δείξτε ότι $L^\infty(E) \subset L^1(E)$ αν και μόνο αν $m(E) < \infty$.
(β) Δείξτε ότι αν $m(E) < \infty$ και $f \in L^\infty(E)$, τότε

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη: Αν $0 < s < \|f\|_\infty$ και $A = \{|f| > s\}$, τότε $\|f\|_p \geq s m(A)^{1/p} \to s$.

4.6.19 Αν $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$ και $f \in L^p$, δείξτε ότι $|f|^{p-1} \in L^q$ και

$$\||f|^{p-1}\|_q = \|f\|_p^{p-1}.$$

4.6.20 Έστω ότι $1 < p < \infty$.
(α) Αν $f \in L^\infty \cap L^p$, δείξτε ότι $f \in L^q$ για κάθε $q > p$.
(β) Αν $f \in L^\infty \cap L^p$, $\|f\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|f\|_q$.

4.6.21 Υποθέτουμε ότι $m(E) = 1$ και $f \in L^p(E)$ για κάποιο $p > 0$. Δείξτε ότι

$$\log \|f\|_p \geq \int_E \log |f|.$$

4.6.22 Αποδείξτε την ακόλουθη γενίκευση της ανισότητας Hölder: Αν $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι θετικοί αριθμοί με άθροισμα ίσο με 1 και $f_1, f_2, \ldots, f_n$ μετρήσιμες συναρτήσεις στο E, τότε

$$\int_E \left(\prod_{j=1}^n |f_j|^{p_j} \right) \leq \prod_{j=1}^n \left(\int_E |f_j| \right)^{p_j}.$$

4.6.23 Αποδείξτε μιά ακόμη γενίκευση της ανισότητας Hölder: Αν $1 \leq p, q, r < \infty$ και $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$ και $f \in L^p$, $g \in L^q$, τότε

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

4.6.24 Αποδείξτε την ακόλουθη ανισότητα τού Liapounov: Αν $1 \leq p, q < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ και $r = \alpha p + (1-\alpha) q$, τότε

$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_p^{\alpha p} \, \|f\|_q^{(1-\alpha)q}.$$

4.6.25 Δείξτε ότι αν $\{f_n\}$ είναι ακολουθία στον L^p, $1 \leq p < \infty$, και $\|f_n\|_p \leq 1$ και $f_n \to f$ $\sigma.\pi.$, τότε $f \in L^p$ και $\|f\|_p \leq 1$.

4.6.26 Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f \in L^p$ για κάποιο $p \in [1, \infty)$, τότε

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

4.6.27 Έστω ότι $1 \leq p < \infty$. Βρείτε συνεχή, μη φραγμένη συνάρτηση $f \in L^p$.

4.6.28 Δείξτε ότι αν $f, g \in L^\infty$, τότε $fg \in L^\infty$ και

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \, \|g\|_\infty.$$

4.6.29 Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E) < \infty$. Έστω $p \in [1, \infty)$. Δείξτε ότι $L^\infty(E) \subset L^p(E)$. Δείξτε ότι αν $f \in L^\infty$, τότε $\|f\|_p \leq m(E)^{1-1/p} \|f\|_\infty$.

4.6.30 Δίνονται συναρτήσεις $f \in L^\infty(E)$ και $g \in L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$. Δείξτε ότι $fg \in L^p(E)$ και $\|fg\|_p \leq \|f\|_\infty \|g\|_p$. Εξετάστε πότε ισχύει η ισότητα.

4.6.31 Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ στον L^p, $1 \leq p < \infty$ και ότι $\{g_n\}$ είναι μιά ακολουθία στον L^∞ με $\|g_n\|_\infty \leq 1$ και $g_n \to g$ $\sigma.\pi.$. Δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον L^p.

4.6.32 Δίνεται ακολουθία συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ με τις ιδιότητες:
(α) $\phi_n \in L^1(\mathbb{R})$ και $\int_{\mathbb{R}} \phi_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) $\phi_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|t|<\delta\}} \phi_n = 0.$$

Δείξτε ότι για $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n\|_p = \infty.$$

4.6.33 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Η **συνάρτηση κατανομής** τής f είναι η συνάρτηση $\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ με

$$\lambda_f(\alpha) = m(\{|f| > \alpha\}).$$

Δείξτε ότι
(α) Η λ_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά.
(β) Αν $|f| \leq |g|$, τότε $\lambda_f \leq \lambda_g$.
(γ) Αν $\{f_n\}$ είναι μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$ και η ακολουθία συναρτήσεων $\{|f_n|\}$ είναι αύξουσα, τότε η ακολουθία συναρτήσεων $\{\lambda_{f_n}\}$ είναι αύξουσα και συγκλίνει σημειακά στη λ_f.
(δ) Αν $1 \leq p \leq \infty$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha)\, d\alpha.$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε το (δ) πρώτα για απλές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τον ορισμό τής συνάρτησης κατανομής. Μετά προσέγγιση και Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.

4.6.34 Έστω $\{f_n\}$ μιά ακολουθία συναρτήσεων με $f_n \to f$ στο χώρο $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$. Έστω $\{g_n\}$ μιά ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $|g_n| \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g_n \to g$ $\sigma.\pi.$ στο $[a, b]$. Δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L^p[a, b]$.

4.6.35* Έστω $f \in L^1$. Για $t \in \mathbb{R}$, η **μεταφορά** τής f κατά t είναι η συνάρτηση $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
(α) $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f_t$.
(β) Αν η g είναι μιά φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(f-f_t)| = 0.$$

(γ) Ισχύει

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f-f_t| = 0.$$

4.6.36 Αν $1 \le p < \infty$ και f είναι μιά μετρήσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, θέτουμε

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p}.$$

Ο χώρος L^p_w (**ασθενής** L^p) αποτελείται από τις συναρτήσεις f για τις οποίες $[f]_p < \infty$. Δείξτε ότι αν $f \in L^p$, τότε $f \in L^p_w$ και $[f]_p \le \|f\|_p$. Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-1/p}\chi_{(0,\infty)}$ ανήκει στον L^p_w αλλά όχι στον L^p.

4.6.37 (α) Δείξτε ότι για $1 < p < \infty$ και $a, b \ge 0$,

$$a^p + b^p \le (a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

(β) Δείξτε ότι για $0 < p < 1$ και $a, b \ge 0$,

$$a^p + b^p \ge (a+b)^p \ge 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $(1+x)^p/(1+x^p)$, $x \in [0,1]$.

4.6.38* Για $0 < p < 1$, δείξτε ότι:
(α) Ο L^p είναι διανυσματικός χώρος.
(β) Η συνάρτηση $d_p(f,g) = \int_{\mathbb{R}} |f-g|^p$ είναι μετρική στον L^p.
(γ) Ο L^p είναι πλήρης μετρικός χώρος.
(δ) Έστω ότι $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ($q < 0!$). Αν $f \in L^p$ και $f, g \ge 0$ και $0 < \int_{\mathbb{R}} g^q < \infty$, τότε $\int_{\mathbb{R}} fg \ge \|f\|_p \|g\|_q$.
(ε)Αν $f, g \in L^p$ και $f, g \ge 0$, τότε $\|f+g\|_p \ge \|f\|_p + \|g\|_p$.
(στ) Αν E, F είναι δύο ξένα, μετρήσιμα σύνολα με πεπερασμένο, θετικό μέτρο, τότε

$$\|\chi_E + \chi_F\|_p > \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p.$$

(ζ) Αν $f, g \in L^p$, τότε $\|f+g\|_p \le 2^{1/p}(\|f\|_p + \|g\|_p)$.

4.6.39* Έστω ότι $E = [0,1]$, $0 < p < 1$ και $f \in L^1(E)$. Δείξτε:
(α) $f \in L^p(E)$.
(β) $\int_E \log|f| \le \log\|f\|_p$.
(γ) $(\int_E |f|^p - 1)/p \ge \log\|f\|_p$.
(δ) $\lim_{p\to 0}(\int_E |f|^p - 1)/p = \int_E \log|f|$.
(ε) $\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp(\int_E \log|f|)$.

4.6.40* Δείξτε ότι αν $f \in L^1[a,b]$ και $f \neq 0$ *σ.π.* στο $[a,b]$, τότε

$$\lim_{p\to 0+}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log|f|\right).$$

4.6.41 Δείξτε ότι το Θεώρημα 4.5.1 είναι ισοδύναμο με την Πρόταση: Έστω $f \in L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$. Υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f-\phi_n|^p = 0.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογες προτάσεις ισοδύναμες με τα θεωρήματα 4.5.2-4.5.4.

4.6.42 Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι το Θεώρημα 4.5.3 δεν ισχύει για $p = \infty$.

4.7 Σημειώσεις

Οι χώροι L^p παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους τής σύγχρονης Ανάλυσης. Ο L^2 ήταν ο πρώτος που μελετήθηκε λόγω τής σημασίας του στη θεωρία τών σειρών Fourier. Η πληρότητα τού L^2 αποδείχθηκε το 1907 από τους E. Fischer και F. Riesz. Η απόδειξη αυτή υπήρξε ένας από τούς πρώτους θριάμβους τής θεωρίας τού Lebesgue. Η βασική θεωρία των χώρων L^p αναπτύχθηκε από τον Riesz το 1910.

Η ανισότητα τού Hölder αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Hölder και Rogers. Το κλασικό βιβλίο [G.Hardy, J.Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press 1952] περιέχει πολλές σχετικές ανισότητες. Μιά απόδειξη τής ανισότητας Hölder με Μιγαδική Ανάλυση υπάρχει στο άρθρο [L.A.Rubel, *A complex-variables proof of Hölder's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 999].

Περισσότερα για τους χώρους L^p υπάρχουν στα βιβλία [10], [3], [7] καθώς και στο βιβλίο [E.H.Lieb, M.Loss, *Analysis*, 2nd edition, Amer. Math. Soc. 2001].

Κεφάλαιο 5

Αφηρημένη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

5.1 σ-Άλγεβρες

Ορισμός 5.1.1 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{A}$ υποσυνόλων τού X ονομάζεται **άλγεβρα** στο X, αν έχει τις ιδιότητες:
(α) Αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E^c := X \setminus E \in \mathcal{A}$.
(β) Αν $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, τότε $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 5.1.2 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{A}$ υποσυνόλων τού X ονομάζεται **σ-άλγεβρα** στο X, αν έχει τις ιδιότητες:
(α) Αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E^c \in \mathcal{A}$.
(β) Αν $E_k \in \mathcal{A}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

Παράδειγμα 5.1.3 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Τα σύνολα $\mathcal{P}(X)$ και $\{\varnothing, X\}$ είναι σ-άλγεβρες στο X.

Παράδειγμα 5.1.4 Το σύνολο $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.1.5 Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ το πολύ αριθμήσιμο ή } E^c \text{ το πολύ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα. Η ιδιότητα (α) είναι προφανής. Αν $E_k \in \mathcal{A}$, τότε είτε όλα τα E_k είναι το πολύ αριθμήσιμα, οπότε και η ένωσή τους, είτε ένα τουλάχιστον είναι υπεραριθμήσιμο, ας πούμε το E_1. Τότε το E_1^c είναι το πολύ αριθμήσιμο. Επειδή $(\cup_{k=1}^{\infty} E_k)^c \subset E_1^c$, το $(\cup_{k=1}^{\infty} E_k)^c$ είναι το πολύ αριθμήσιμο και συνεπώς $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$. Άρα η $\mathcal{A}$ έχει και την ιδιότητα (β).

Παράδειγμα 5.1.6 Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Έστω $X_1 \in \mathcal{A}$, $X_1 \neq \varnothing$. Το σύνολο $\mathcal{A}_1 = \{E \cap X_1 : E \in \mathcal{A}\}$ είναι σ-άλγεβρα στο X_1.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η τομή μιάς οικογένειας σ-αλγεβρών στο σύνολο X είναι σ-άλγεβρα στο X.

Πρόταση 5.1.7 *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Αν $\mathcal{E}$ είναι ένα μη κενό σύνολο υποσυνόλων τού X, τότε υπάρχει μιά ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$.*

Απόδειξη.

Έστω Φ το σύνολο των σ-αλγεβρών που περιέχουν το $\mathcal{E}$. Το Φ δεν είναι κενό διότι $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, δηλαδή $\mathcal{P}(X) \in \Phi$. Θέτουμε

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Phi} \mathcal{A}.$$

Το $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Επιπλέον, αν $\mathcal{A}$ είναι μιά σ-άλγεβρα με $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, τότε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. □

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ ονομάζεται σ-άλγεβρα **που παράγεται από το** $\mathcal{E}$.

Πρόταση 5.1.8 *Αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι μη κενά σύνολα υποσυνόλων τού X και $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, τότε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.*

Απόδειξη.
Η $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(F)$. Η $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα με $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Άρα $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$. □

Παράδειγμα 5.1.9 Έστω $\mathcal{E}$ το σύνολο όλων των ανοικτών συνόλων τού $\mathbb{R}$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ ονομάζεται **Borel σ-άλγεβρα** και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$. Η $\mathcal{B}$ είναι λοιπόν η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα στο $\mathbb{R}$. Κάθε σύνολο που ανήκει στη $\mathcal{B}$ ονομάζεται **σύνολο Borel**. Είναι φανερό ότι κάθε F_σ σύνολο και κάθε G_δ σύνολο είναι σύνολο Borel. Επειδή κάθε ανοικτό σύνολο είναι μετρήσιμο, ο ορισμός τής $\mathcal{B}$ συνεπάγεται ότι κάθε σύνολο Borel είναι μετρήσιμο.

Πρόταση 5.1.10 *Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$.*
(α) $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}$.
(β) $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a < b\}$.
(γ) $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : a < b\}$.
(δ) $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a < b\}$.
(ε) $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
(στ) $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
(ζ) $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
(η) $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.
Ισχύει $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) = \mathcal{B}$ για $j = 1, 2, \ldots, 8$.

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο ότι $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}$. Τα υπόλοιπα αφήνονται για άσκηση.

Επειδή $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}$, η Πρόταση 5.1.8 συνεπάγεται $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{B}$. Για το αντίστροφο εργαζόμαστε ως εξής: Κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ ανήκει στην $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ διότι $(-\infty, a) = \cup_n(-n, a)$. Παρομοίως, κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής (a, ∞) ανήκει στην $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. Αν τώρα A είναι τυχαίο ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$, τότε το A γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων τής μορφής $(-\infty, a)$ ή (a, ∞) ή (a, b). Άρα $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. Από την Πρόταση 5.1.8, $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. □

Παράδειγμα 5.1.11 Συμβολίζουμε με $\overline{\mathcal{B}}$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων τού $\overline{\mathbb{R}}$ που έχουν μιά από τις ακόλουθες μορφές:

$$E,\ E \cup \{\infty\},\ E \cup \{-\infty\},\ E \cup \{\infty, -\infty\},$$

όπου $E \in \mathcal{B}$. Το σύνολο $\overline{\mathcal{B}}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\overline{\mathbb{R}}$. Η $\overline{\mathcal{B}}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα τού $\overline{\mathbb{R}}$.

5.2 Η έννοια τού μέτρου

Ορισμός 5.2.1 Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Μιά συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ονομάζεται **μέτρο** στο X αν έχει τις ιδιότητες:
(α) $\mu(\varnothing) = 0$,
(β) Αν $\{E_j\}$ είναι μιά ακολουθία από ξένα σύνολα της $\mathcal{A}$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **χώρος μέτρου**.

Η ιδιότητα (β), η οποία ονομάζεται **αριθμήσιμη προσθετικότητα**, συνεπάγεται την **πεπερασμένη προσθετικότητα**: Αν $\{E_j\},\ j = 1, 2, \ldots, n$ είναι ξένα σύνολα της $\mathcal{A}$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j).$$

Αν για ένα μέτρο μ στο X, ισχύει $\mu(X) < \infty$, το μ ονομάζεται **πεπερασμένο μέτρο**. Επειδή για κάθε $E \in \mathcal{A}$, $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c)$, αν το μ είναι πεπερασμένο, τότε $\mu(E) < \infty$. Αν $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ με $E_n \in \mathcal{A}$ και $\mu(E_n) < \infty$, τότε το μ ονομάζεται **σ-πεπερασμένο**. Ένας χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με $\mu(X) = 1$ λέγεται **χώρος πιθανότητας**· το μ λέγεται **μέτρο πιθανότητας.**

Παράδειγμα 5.2.2 Το μέτρο Lebesgue $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ είναι ένα σ-πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{R}$. Αν περιορίσουμε το m στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$, το $m : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ είναι σ-πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.2.3 Ας είναι X ένα μη κενό σύνολο και p ένα στοιχείο τού X. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mu_p : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ με

$$\mu_p(E) = \begin{cases} 0, & \text{αν } p \notin E, \\ 1, & \text{αν } p \in E. \end{cases}$$

Το μ είναι μέτρο στο X και ονομάζεται **μέτρο Dirac** ή **σημειακή μάζα**.

Παράδειγμα 5.2.4 Αν E είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{N}$, συβολίζουμε με $\text{card}(E)$ τον αριθμό των στοιχείων τού E. Στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{card}(E), & \text{αν το E είναι πεπερασμένο}, \\ \infty, & \text{αν το E είναι άπειρο}. \end{cases}$$

Το μ είναι ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{N}$ και ονομάζεται **μέτρο αρίθμησης**.

Παράδειγμα 5.2.5 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Έστω F ένα μη κενό σύνολο στην $\mathcal{A}$. Θεωρούμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_F = \{F \cap E : E \in \mathcal{A}\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $\mu_F : \mathcal{A}_F \to [0, \infty]$ με

$$\mu_F(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}_F.$$

Το μ_F είναι μέτρο στο F. Λέμε ότι το μ_F είναι ο **περιορισμός** τού μ στο F.

Παράδειγμα 5.2.6 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μιά μετρήσιμη, θετική συνάρτηση. Για $E \in \mathcal{M}$, ορίζουμε

$$\mu_f(E) = \int_E f.$$

Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα τής §3.2 (Παρατήρηση 3 και Θεώρημα Levi), βλέπουμε ότι το μ_f είναι ένα μέτρο ορισμένο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$.

Διαισθητικά, ένα μέτρο στο X είναι μιά κατανομή μάζας πάνω στο X. Ο αριθμός $\mu(X)$ είναι η συνολική μάζα. Στην περίπτωση της σημειακής μάζας (Παράδειγμα 5.2.3), όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο τού X. Στο μέτρο αρίθμησης (Παράδειγμα 5.2.4), άπειρη μάζα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη πάνω στο $\mathbb{N}$. Παρομοίως το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ κατανέμει ομοιόμορφα άπειρη μάζα πάνω στο $\mathbb{R}$. Το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο $[0, 1]$ (βλ. Παράδειγμα 5.2.5) κατανέμει συνολική μάζα ίση με 1 ομοιόμορφα πάνω στο $[0, 1]$. Στο Παράδειγμα 5.2.6, η συνάρτηση f παίζει το ρόλο της γραμμικής πυκνότητας.

Για τα μέτρα πιθανότητας, μιά διαισθητική ερμηνεία είναι ότι εκφράζουν την πιθανότητα να συμβεί κάτι. Βλ. Ασκήσεις 5.6.17, 5.6.18.

Οι βασικές ιδιότητες των μέτρων συνοψίζονται στήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.2.7 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.*
(α) *(**Μονοτονία**) Αν $E, F \in \mathcal{A}$ και $E \subset F$, τότε $\mu(E) \leq \mu(F)$.*
(β) *(**Υποπροσθετικότητα**) Αν $\{E_j\} \subset \mathcal{A}$, τότε $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.*
(γ) *(**Συνέχεια από κάτω**) Αν $\{E_j\} \subset \mathcal{A}$ και $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, τότε $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*
(δ) *(**Συνέχεια από πάνω**) Αν $\{E_j\} \subset \mathcal{A}$ και $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ και $\mu(E_1) < \infty$, τότε $\mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

Απόδειξη.

(α) Αν $E \subset F$, τότε $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

(β) Θέτουμε $F_1 = E_1$ και $F_k = E_k \setminus (\cup_{j=1}^{k-1} E_j)$ για $k \geq 2$. Τα F_k είναι ξένα και $\cup_{j=1}^{n} E_j = \cup_{j=1}^{n} F_j$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Άρα, λόγω τού (α),

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(γ) Θέτουμε $E_0 = \varnothing$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \setminus E_{j-1})\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (E_j \setminus E_{j-1})\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

(δ) Θέτουμε $F_j = E_1 \setminus E_j$ και παρατηρούμε ότι $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, $\mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$ και $\cup_{j=1}^{\infty} F_j = E_1 \setminus (\cap_{j=1}^{\infty} E_j)$. Εφαρμόζουμε το (γ) και προκύπτει

$$\begin{aligned}
\mu(E_1) &= \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) + \mu(\cup_{j=1}^{\infty} F_j) = \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) \\
&= \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) + \lim_{j\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(E_j)].
\end{aligned}$$

Επειδή $\mu(E_1) < \infty$, μπορούμε να το αφαιρέσουμε οπότε προκύπτει το (δ). □

5.3 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 5.3.1 *Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Μιά συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ονομάζεται $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.*

Αν $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, τότε οι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις είναι ακριβώς οι Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Οι περισσότερες από τις ιδιότητες των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων ισχύουν και για τις $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις.

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, για συναρτήσεις $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, θα χρησιμοποιούμε τού συμβολισμούς $\{f > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$, $\{f \geq \alpha\}$, $\{f < \alpha\}$, $\{f \leq \alpha\}$, $\{f = \alpha\}$ κλπ. Η ακόλουθη πρόταση αποδεικνύεται όπως ακριβώς και η αντίστοιχή της στο Κεφάλαιο 2.

Πρόταση 5.3.2 *Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μιά συνάρτηση. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:* (α) *Η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.* (β) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$. (γ) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$. (δ) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 5.3.3 *Ας είναι $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μιά συνάρτηση.*
(α) *Αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, τότε το σύνολο*

$$\mathcal{E} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο $\overline{\mathbb{R}}$ και $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{E}$.
(β) *Η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $E \in \overline{\mathcal{B}}$, ισχύει $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.*
Απόδειξη.
(α) Επειδή $f^{-1}(\varnothing) = \{x \in X : f(x) \in \varnothing\} = \varnothing \in \mathcal{A}$, ισχύει $\varnothing \in \mathcal{E}$. Επίσης, αν $E \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Άρα $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathcal{A}$. Επομένως $E^c \in \mathcal{E}$. Τέλος, αν $E_j \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(E_j) \in \mathcal{A}$ και συνεπώς $f^{-1}(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \cup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(E_j) \in \mathcal{A}$. Άρα $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{E}$. Δείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{E}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Έστω τώρα A ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\overline{\mathbb{R}}$. Αν $A = [-\infty, a)$, τότε $f^{-1}(A) = \{f < a\} \in \mathcal{A}$ κι επομένως $A \in \mathcal{E}$. Αν $A = (a, \infty]$, τότε $f^{-1}(A) = \{f > a\} \in \mathcal{A}$ κι επομένως $A \in \mathcal{E}$. Αν $A = (a, b)$, τότε $f^{-1}(A) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$ οπότε πάλι $A \in \mathcal{E}$. Τέλος αν A είναι ένα τυχαίο ανοικτό υποσύνολο τού $\overline{\mathbb{R}}$, τότε το A είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων της μορφής που μόλις εξετάσαμε και άρα $A \in \mathcal{E}$. Επειδή η $\overline{\mathcal{B}}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα τού $\overline{\mathbb{R}}$, συμπεραίνουμε ότι $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{E}$.

(β) Έστω ότι η $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. Στο (α) αποδείξαμε ότι $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{E}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $E \in \overline{\mathcal{B}}$, ισχύει $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε $E \in \overline{\mathcal{B}}$, ισχύει $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση για $E = [-\infty, a)$ και προκύπτει ότι $\{f < \alpha\} = f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Άρα η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. □

Στίς ακόλουθες προτάσεις $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου. Παραθέτουμε τις προτάσεις χωρίς αποδείξεις διότι οι αποδείξεις είναι όμοιες με τις αποδείξεις των αντίστοιχων προτάσεων τού Κεφαλαίου 2.

Πρόταση 5.3.4 *Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μιά συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι X_n είναι το πολύ αριθμησίμου πλήθους, ξένα ανά δύο σύνολα τής $\mathcal{A}$ και ότι $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$. Θεωρούμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{A}_n = \{E \cap X_n : E \in \mathcal{A}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, και υποθέτουμε ότι για κάθε n, ο περιορισμός $g_n := f\,|_{X_n}$ είναι $\mathcal{A}_n$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.*

Πρόταση 5.3.5 *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες, τότε τα σύνολα $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$ και $\{f = g\}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$.*

Πρόταση 5.3.6 *Αν $c \in \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις f, g είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες, τότε οι συναρτήσεις $cf, f+g, fg$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες.*

Πρόταση 5.3.7 *Αν $\{f_n\}$ είναι μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων που είναι όλες $\mathcal{A}$-μετρήσιμες, τότε και οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες.*

Λέμε ότι μιά ιδιότητα ισχύει μ-**σχεδόν παντού** ($\mu - \sigma.\pi.$) αν το σύνολο των σημείων τού X για τα οποία δεν ισχύει έχει μέτρο μ ίσο με το 0. Οι συναρτήσεις $f, g : E \to \mathbb{R}$ ονομάζονται μ-**ισοδύναμες**, αν οι f και g είναι $\mu - \sigma.\pi.$ ίσες, δηλαδή αν $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. Λέμε ότι μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει $\mu - \sigma.\pi.$ προς τη συνάρτηση f, αν υπάρχει σύνολο $A \subset X$ τέτοιο ώστε $\mu(A) = 0$ και η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά προς την f στο σύνολο $X \setminus A$.

Μιά συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **απλή** αν είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο. Έστω ϕ μιά απλή συνάρτηση με σύνολο τιμών $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Τα σύνολα $A_i := \{\phi = a_i\}$, $i = 1, , 2, \ldots, n$, είναι μη κενά, $\mathcal{A}$-μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Η ϕ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

Η παραπάνω παράσταση τής ϕ (με a_i διαφορετικά ανά δύο και A_i ξένα ανά δύο) ονομάζεται **κανονική παράσταση** τής ϕ. Το ακόλουθο βασικό θεώρημα αποδεικνύεται όπως το αντίστοιχό του στο Κεφάλαιο 2.

Θεώρημα 5.3.8 *Δίνεται μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε $\phi_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο X.*

5.4 Το ολοκλήρωμα

Η θεωρία της ολοκλήρωσης συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα χώρο μέτρου αναπτύσσεται με τρόπο παρόμοιο με τη θεωρία τού ολοκληρώματος Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Έτσι θα αναφέρουμε με συντομία τόυς βασικούς ορισμούς και θα παραθέσουμε τα κυριώτερα θεωρήματα χωρίς αποδείξεις.

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ο ορισμός τού ολοκληρώματος γίνεται σε τρία βήματα:

Βήμα 1. Θετικές, απλές συναρτήσεις.
Αν $\phi : X \to [0,\infty)$ είναι μιά απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

ορίζουμε

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j),$$

με τη σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$. Αν το ολοκλήρωμα αυτό είναι πεπερασμένο, λέμε ότι $\phi \in L^1(\mu)$.

Βήμα 2. Θετικές συναρτήσεις.
Για μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0,\infty]$, ορίζουμε

$$\int_X f \, d\mu = \sup\{\int_X \phi \, d\mu : 0 \le \phi \le f,\ \phi \in L^1(\mu), \phi \ \text{απλή}\}.$$

Αν $\int_X f \, d\mu < \infty$, τότε γράφουμε $f \in L^1(\mu)$. Για $E \in \mathcal{A}$, ορίζουμε $\int_E f \, d\mu = \int_X f\chi_E \, d\mu$.

Βήμα 3. Γενική περίπτωση.
Για μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ για την οποία τουλάχιστον μιά από τις f^+ και f^- ανήκει στον $L^1(\mu)$, ορίζουμε

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Αν $f^+ \in L^1(\mu)$ και $f^- \in L^1(\mu)$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και γράφουμε $f \in L^1(\mu)$. Το ολοκλήρωμα $\int_X f \, d\mu$ ονομάζεται ολοκλήρωμα τής f ως προς το μέτρο μ. Άλλοι συμβολισμοί είναι $\int_X f(x) \, d\mu(x)$ και $\int_X f(x) \, \mu(dx)$. Αν $E \in \mathcal{A}$ και $\int_E |f| \, d\mu < \infty$, λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο E. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E, ορίζουμε $\int_E f = \int_X f\chi_E$.

Βασικές ιδιότητες τού ολοκληρώματος

1. **Γραμμικότητα**. Αν $c \in \mathbb{R}$ και $f, g \in L^1(\mu)$, τότε $cf \in L^1(\mu)$, $f + g \in L^1(\mu)$ και

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu, \qquad \int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

2. Αν $f \in L^1(\mu)$, τότε η f είναι $\mu - \sigma.\pi.$ πεπερασμένη.
3. Αν $f, g \in L^1(\mu)$ και $f \ge g$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $\int_X f \, d\mu \ge \int_X g \, d\mu$.
4. Αν $f, g \in L^1(\mu)$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$. (β) $\int_X |f-g|\,d\mu = 0$. (γ) $\forall E \in \mathcal{A},\ \ \int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$.
5. **Ανισότητα Chebyshev:** Αν η $f \in L^1(\mu)$, τότε

$$\forall \alpha \geq 0,\ \ \mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{\int_X |f|\,d\mu}{\alpha}.$$

Θεωρήματα σύγκλισης

Θεώρημα 5.4.1 (**Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης**) *Αν $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ είναι μιά αύξουσα ακολουθία $\mathcal{A}$-μετρήσιμων συναρτήσεων στο X και $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο X, τότε*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Θεώρημα 5.4.2 (**Beppo Levi**) *Αν $f_n : X \to [0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μιά ακολουθία $\mathcal{A}$-μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f_n\,d\mu\right).$$

Θεώρημα 5.4.3 (**Λήμμα τού Fatou**) *Έστω $f_n : X \to [0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία $\mathcal{A}$-μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Θεώρημα 5.4.4 (**Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης**) *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι:*
(α) *$f_n \xrightarrow{\sigma} f$ σ.π. στο X.*
(β) *Υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1(\mu)$ τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ και για σχεδόν κάθε $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$. Τότε $f \in L^1(\mu)$ και*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Θεώρημα 5.4.5 *Έστω $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\,d\mu < \infty$, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σ.π. προς μιά συνάρτηση που ανήκει στον $L^1(\mu)$. Επιπλέον ισχύει*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Παράδειγμα 5.4.6 Έστω $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ο χώρος τού μέτρου αρίθμησης (βλ. Παράδειγμα 5.2.4). Προφανώς κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-μετρήσιμη. Έστω $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ μιά συνάρτηση. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_m : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ με

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ 0, & \text{αν } x \in \{m+1, m+2, \ldots\} \end{cases} = f(x)\chi_{\{1,2,\ldots,m\}}.$$

Καθεμιά από τις f_m είναι απλή συνάρτηση αφού παίρνει πεπερασμένου πλήθους τιμές. Εύκολα μπορούμε να γράψουμε την f_m σα γραμμικό συνδυασμό χαρακτηριστικών συναρτήσεων:

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f(k)\chi_{\{k\}}(x), \quad x \in \mathbb{N}.$$

Είναι φανερό ότι η ακολουθία $\{f_m\}$ είναι αύξουσα και $f_m \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{N}$. Έτσι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δίνει

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_m \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f(k)\mu(\{k\}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k). \end{aligned}$$

Μιά συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ανήκει στον $L^1(\mu)$ αν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^+(k) \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f^-(k)$$

συγκλίνουν ή ισοδύναμα, αν $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty$. Σ΄ αυτή την περίπτωση,

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f^+(k) - \sum_{k=1}^{\infty} f^-(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Παράδειγμα 5.4.7 Ας είναι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty)$ μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνολοσυνάρτηση $\mu_f : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathcal{A}.$$

Θα δείξουμε ότι το μ_f είναι μέτρο στο X. Έστω $\{E_j\}$ μιά ακολουθία ξένων συνόλων τής $\mathcal{A}$. Λόγω τού Θεωρήματος Levi,

$$\mu_f\left(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \int_X f\chi_{\cup_j E_j} \, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} f\chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_f(E_j).$$

Άρα το μ_f είναι μέτρο στο X.

Έστω τώρα μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$. Θα δείξουμε ότι

$$\int_X g\, d\mu_f = \int_X gf\, d\mu. \tag{5.1}$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $E \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\int_X g\, d\mu_f = \int_X \chi_E\, d\mu_f = \mu_f(E) = \int_E f\, d\mu = \int_X gf\, d\mu.$$

Άρα η (5.1) ισχύει για χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Λόγω γραμμικότητας τού ολοκληρώματος, η (5.1) ισχύει και για θετικές, απλές συναρτήσεις. Έστω τώρα μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, θετική συνάρτηση g. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.8 βρίσκουμε αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων ϕ_n με $\phi_n \xrightarrow{\sigma} g$ στο X. Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, εφαρμοζόμενο δυό φορές, δίνει

$$\int_X gf\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n\, d\mu_f = \int_X g\, d\mu_f.$$

Έτσι η (5.1) αποδείχθηκε.

Μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ανήκει στον $L^1(\mu_f)$ αν και μόνο αν $g^+ f, g^- f \in L^1(\mu)$. Σ' αυτή την περίπτωση,

$$\int_X g\, d\mu_f = \int_X g^+\, d\mu_f - \int_X g^-\, d\mu_f = \int_X g^+ f\, d\mu - \int_X g^- f\, d\mu = \int_X gf\, d\mu.$$

Παράδειγμα 5.4.8 Ας είναι X ένα σύνολο και p ένα σημείο τού X. Θεωρούμε το μέτρο Dirac μ_p στο X (βλ. Παράδειγμα 5.2.3) και μιά συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$. Προφανώς η f είναι $\mathcal{P}(X)$-μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_X f\, d\mu_p = \int_{\{p\}} f\, d\mu_p + \int_{X\setminus\{p\}} f\, d\mu_p = \int_{\{p\}} f\, d\mu_p = \int_X f\chi_{\{p\}}\, d\mu_p. \tag{5.2}$$

Η συνάρτηση $f\chi_{\{p\}}$ παίρνει το πολύ δύο τιμές: 0 και $f(p)$. Άρα είναι απλή και μάλιστα ισχύει $f\chi_{\{p\}} = f(p)\chi_{\{p\}}$. Έτσι η (5.2) δίνει

$$\int_X f\, d\mu_p = \int_X f(p)\chi_{\{p\}}\, d\mu_p = f(p)\mu_p(\{p\}) = f(p). \tag{5.3}$$

Επομένως $f \in L^1(\mu_p)$.

Κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ανήκει στον $L^1(\mu_p)$ και μάλιστα

$$\int_X f\, d\mu_p = \int_X f^+\, d\mu_p - \int_X f^-\, d\mu_p = f^+(p) - f^-(p) = f(p).$$

5.5 $*$ Προσημασμένα μέτρα

Ορισμός 5.5.1 Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Μιά συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ ονομάζεται **προσημασμένο μέτρο** αν έχει τις ιδιότητες:
(α) $\nu(\varnothing) = 0$.
(β) Το ν παίρνει το πολύ μία από τις τιμές $\infty, -\infty$.
(γ) Αν $\{E_j\}$ είναι μιά ακολουθία ξένων συνόλων τής $\mathcal{A}$, τότε

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j). \tag{5.4}$$

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ονομάζεται **χώρος προσημασμένου μέτρου**.

Παρατήρηση 5.5.2 1. Κάθε μέτρο είναι και προσημασμένο μέτρο ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.
2. Το αριστερο μέλος τής (5.4) είναι ανεξάρτητο τής διάταξης των E_j. Επομένως, αν το αριστερό μέλος τής (5.4) είναι πεπερασμένο, τότε η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως.

Παράδειγμα 5.5.3 Αν μ_1, μ_2 είναι μέτρα ορισμένα στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ και ένα τουλάχιστον είναι πεπερασμένο, τότε το $\mu_1 - \mu_2$ είναι προσημασμένο μέτρο.

Παράδειγμα 5.5.4 Ας είναι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε μία τουλάχιστον από τις f^+, f^- ανήκει στον $L^1(\mu)$. Τότε ένα τουλάχιστον από τα μέτρα μ_{f^+}, μ_{f^-} είναι πεπερασμένο. Άρα το $\mu_f := \mu_{f^+} - \mu_{f^-}$ είναι προσημασμένο μέτρο στο X. Για κάθε $E \in \mathcal{A}$, ισχύει

$$\mu_f(E) = \mu_{f^+}(E) - \mu_{f^-}(E) = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \int_E (f^+ - f^-) d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ένας χώρος προσημασμένου μέτρου. Ένα σύνολο $P \in \mathcal{A}$ ονομάζεται **θετικό** (για το ν) αν για κάθε σύνολο $P_1 \subset P$ με $P_1 \in \mathcal{A}$, ισχύει $\nu(P_1) \geq 0$. Ένα σύνολο $N \in \mathcal{A}$ ονομάζεται **αρνητικό** (για το ν) αν για κάθε σύνολο $N_1 \subset N$ με $E \in \mathcal{A}$, ισχύει $\nu(E) \leq 0$. Ένα σύνολο $M \in \mathcal{A}$ ονομάζεται **μηδενικό** (για το ν) αν για κάθε σύνολο $M_1 \subset M$ με $M_1 \in \mathcal{A}$, ισχύει $\nu(M_1) = 0$.

Λήμμα 5.5.5 (α) *Αν το P είναι θετικό σύνολο και A είναι ένα υποσύνολο τού P, τότε και το A είναι θετικό σύνολο.*
(β) *Αν $P_1, P_2, \ldots$ είναι θετικά σύνολα, τότε και η ένωσή τους είναι θετικό σύνολο.*
Απόδειξη.
Το (α) είναι άμεση συνέπεια τού ορισμού τού θετικού συνόλου. Για το (β) θεωρούμε θετικά σύνολα $P_1, P_2, \ldots$ και θέτουμε $Q_n = P_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} P_j$. Τότε $Q_n \subset P_n$ και συνεπώς τα Q_n είναι θετικά σύνολα. Επίσης τα Q_n είναι ξένα και $\cup_n P_n = \cup_n Q_n$. Αν $E \in \mathcal{A}$ και $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} P_n$, τότε

$$\nu(E) = \nu\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap Q_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap Q_n) \geq 0.$$

$\square$

Λήμμα 5.5.6 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ένας χώρος προσημασμένου μέτρου. Αν $E \in \mathcal{A}$ και $0 < \nu(E) < \infty$, τότε υπάρχει ένα θετικό υποσύνολο P τού E με $\nu(P) > 0$.*

Απόδειξη.
Ας υποθέσουμε ότι το E δεν περιέχει κανένα θετικό υποσύνολο αυστηρά θετικού μέτρου. Κατασκευάζουμε ακολουθία φυσικών αριθμών $\{n_j\}$ και ακολουθία $\{E_j\} \subset \mathcal{A}$ ως εξής:
Αφού το E δεν είναι θετικό, θα έχει υποσύνολο με αρνητικό μέτρο. Θέτουμε

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists E_1 \subset E,\ E_1 \in \mathcal{A},\ \nu(E_1) < -1/n\}.$$

Το $E \setminus E_1$ δεν είναι θετικό σύνολο. Άρα θα έχει υποσύνολα αρνητικού μέτρου. Θέτουμε

$$n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists E_2 \subset E \setminus E_1,\ E_2 \in \mathcal{A},\ \nu(E_2) < -1/n\}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθίες $\{n_j\}$, $\{E_j\}$ τέτοιες ώστε

$$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists E_{k+1} \subset E \setminus \cup_{j=1}^{k} E_j,\ E_{k+1} \in \mathcal{A},\ \nu(E_{k+1}) < -1/n\}.$$

Θέτουμε $P = E \setminus \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Άρα

$$\nu(E) = \nu(P) + \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

Επειδή $\nu(E_j) < 0$ και $\nu(E) > 0$, ισχύει $\nu(P) > 0$. Επίσης, επειδή $\nu(E) < \infty$, η παραπάνω σειρά συγκλίνει απολύτως. Όμως $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j < \sum_{j=1} |\nu(E_j)| < \infty$. Άρα $\lim_{j\to\infty} 1/n_j = 0$. Αν δείξουμε ότι το P είναι θετικό σύνολο, τότε το E θα έχει θετικό υποσύνολο, αυστηρά θετικού μέτρου· άτοπο. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι το P είναι θετικό σύνολο. Αν το P δεν είναι θετικό, τότε θα έχει υποσύνολο B με $\nu(B) < 0$. Εφόσον $n_j \to \infty$, μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\nu(B) < -1/(n_k - 1)$. Όμως

$$B \subset P \subset E \setminus \cup_{j=1}^{k-1} E_j$$

και ο n_k είναι ο μικρότερος φυσικός έτσι ώστε το $E \setminus \cup_{j=1}^{k-1} E_j$ να περιέχει σύνολο με μέτρο μικρότερο τού $-1/n_k$. Άτοπο. $\square$

Θεώρημα 5.5.7 (**Διάσπασης τού Hahn**) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ένας χώρος προσημασμένου μέτρου. Υπάρχει ένα θετικό σύνολο P και ένα αρνητικό σύνολο N τέτοια ώστε $X = P \cup N$ και $P \cap N = \varnothing$. Αν P', N' είναι ένα άλλο τέτοιο ζεύγος, τότε τα σύνολα $P \triangle P'$ και $N \triangle N'$ είναι μηδενικά.*

Απόδειξη.
Χωρίς βλάβη τής γενικότητας υποθέτουμε ότι το ν δεν παίρνει την τιμή ∞. Θέτουμε

$$s = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{A},\ A \text{ θετικό σύνολο}\}.$$

Το $\varnothing$ είναι θετικό σύνολο. Άρα $s \geq 0$. Θεωρούμε ακολουθία θετικών συνόλων $\{A_n\}$ έτσι ώστε

$$s = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

και θέτουμε

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Θα δείξουμε ότι $\nu(P) = s$. Το P είναι θετικό σύνολο λόγω τού Λήμματος 5.5.5. Άρα $\nu(P) \leq s$. Από την άλλη μεριά, πάλι λόγω τού Λήμματος 5.5.5, επειδή $P \setminus A_n \subset P$, το $P \setminus A_n$ είναι θετικό σύνολο και συνεπώς $\nu(P \setminus A_n) \geq 0$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu(P) = \nu(A_n) + \nu(P \setminus A_n) \geq \nu(A_n).$$

Παίρνουμε όρια για $n \to \infty$ και προκύπτει $\nu(P) \geq s$. Άρα $s = \nu(P) < \infty$.

Θέτουμε $N = X \setminus P$. Θα δείξουμε ότι το N είναι αρνητικό σύνολο. Έστω $E \subset N$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\nu(E) \leq 0$. Αν $\nu(E) > 0$, τότε από το Λήμμα 5.5.6, υπάρχει θετικό σύνολο $A \subset E$ με $\nu(A) > 0$. Από το Λήμμα 5.5.5 το $P \cup A$ είναι θετικό σύνολο και επομένως

$$s \geq \nu(P \cup A) = \nu(P) + \nu(A) = s + \nu(A) > s.$$

Άτοπο.

Βρήκαμε λοιπόν ένα θετικό σύνολο P και ένα αρνητικό σύνολο N τέτοια ώστε $X = P \cup N$ και $P \cap N = \varnothing$. Έστω P', N' ένα άλλο τέτοιο ζέυγος. Ισχύει $P \setminus P' \subset P$ και $P \setminus P' \subset N'$. Άρα το $P \setminus P'$ είναι και θετικό και αρνητικό σύνολο, δηλαδή μηδενικό. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το $P' \setminus P$ είναι μηδενικό. Τέλος το $N \triangle N'$ είναι μηδενικό διότι $N \triangle N' = P \triangle P'$. □

Η διάπαση $X = P \cup N$, όπου τα P, N είναι ξένα σύνολα, το P είναι θετικό και το N αρνητικό, ονομάζεται **διάσπαση Hahn** για το προσημασμένο μέτρο ν. Η διάσπαση αυτή δεν είναι γενικά μοναδική, αλλά, όπως προκύπτει από Θεώρημα Διάσπασης τού Hahn, κάθε άλλη τέτοια διάσπαση προκύπτει με μεταφορά μηδενικών συνόλων από το P στο N και από το N στο P.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι μ, ν είναι δύο μέτρα στο X, ορισμένα στην ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Λέμε ότι τα μ, ν είναι **αμοιβαία ιδιάζοντα** και γράφουμε $\mu \perp \nu$, αν υπάρχουν σύνολα $M, N \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $M \cap N = \varnothing$, $M \cup N = X$, $\nu(M) = 0$ και $\mu(N) = 0$. Δηλαδή, αν τα μ, ν είναι αμοιβαία ιδιάζοντα, τότε 'ζούνε' σε ξένα σύνολα.

Θεώρημα 5.5.8 (**Διάσπασης τού Jordan**) *Αν $(X, \mathcal{A}, \nu)$ είναι ένας χώρος προσημασμένου μέτρου, τότε υπάρχουν μοναδικά μέτρα ν^+, ν^- στο X τέτοια ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$.*

Απόδειξη.
Έστω $X = P \cup N$ μιά διάσπαση Hahn για το ν. Ορίζουμε

$$\nu^+(E) = \nu(E \cup P) \quad \text{και} \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap N), \ \ E \in \mathcal{A}.$$

Είναι προφανές ότι $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$.

Τώρα για τη μοναδικότητα: Ας υποθέσουμε ότι $\nu = \mu^+ - \mu^-$ και $\mu^+ \perp \mu^-$. Αφού τα μ^+, μ^- είναι αμοιβαία ιδιάζοντα, θα υπάρχουν σύνολα $E, F \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $E \cap F = \varnothing$, $E \cup F = X$ και $\mu^+(F) = \mu^-(E) = 0$. Τότε η $X = E \cup F$ είναι μιά άλλη διάσπαση Hahn για το προσημασμένο μέτρο ν. Από το Θεώρημα Διάσπασης τού Hahn προκύπτει ότι το σύνολο $P \triangle E$ είναι μηδενικό για το ν. Άρα για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$$

και παρομοίως $\nu^- = \mu^-$. $\square$

Η ισότητα $\nu = \nu^+ - \nu^-$ που προκύπτει από το Θεώρημα 5.5.8 ονομάζεται **διάσπαση Jordan** για το προσημασμένο μέτρο ν. Η **ολική μεταβολή** τού ν είναι το μέτρο $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$.

Παράδειγμα 5.5.9 Ας είναι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε μία τουλάχιστον από τις f^+, f^- ανήκει στον $L^1(\mu)$. Είδαμε στο Παράδειγμα 5.5.4 ότι η συνάρτηση

$$\mu_f(E) = \mu_{f^+}(E) - \mu_{f^-}(E) = \int_E f\, d\mu, \ \ E \in \mathcal{A},$$

είναι προσημασμένο μέτρο στο X. Θεωρούμε τα σύνολα $P = \{f \geq 0\}$ και $N = \{f < 0\}$. Προφανώς ισχύει $P \cup N = X$ και $P \cap N = \varnothing$. Επίσης, αν $P_1 \subset P$ και $N_1 \subset N$, τότε

$$\mu_f(P_1) = \int_{P_1} f\, d\mu \geq 0 \quad \text{και} \quad \mu_f(N_1) = \int_{N_1} f\, d\mu \leq 0.$$

Άρα το P είναι θετικό σύνολο και το N είναι αρνητικό σύνολο για το προσημασμένο μέτρο μ_f. Επομένως μιά διάσπαση Hahn για το μ_f είναι η $X = P \cup N$.

Είναι φανερό ότι $f^+ = f\chi_P$ και $f^- = -f\chi_N$ στο X. Άρα

$$\mu_{f^-}(P) = \int_X f^-\chi_P d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0,$$
$$\mu_{f^+}(N) = \int_X f^+\chi_N d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0.$$

Συνεπώς τα μέτρα μ_{f^+}, μ_{f^-} είναι αμοιβαία ιδιάζοντα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η διάσπαση Jordan για το μ_f είναι η $\mu_f = \mu_{f^+} - \mu_{f^-}$.

Η ολική μεταβολή τού προσημασμένου μέτρου μ_f είναι το μέτρο $|\mu_f| = \mu_{f^+} + \mu_{f^-}$. Άρα για $E \in \mathcal{A}$,

$$|\mu_f|(E) = \mu_{f^+}(E) - \mu_{f^-}(E) = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f|\, d\mu,$$

δηλαδή $|\mu_f| = \mu_{|f|}$. Τελικά λοιπόν έχουμε

$$(\mu_f)^+ = \mu_{f^+}, \quad (\mu_f)^- = \mu_{f^-}, \quad |\mu_f| = \mu_{|f|}.$$

Παρατήρηση 5.5.10 Είδαμε στα Παραδείγματα 5.5.4, 5.5.9 ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε μία τουλάχιστον από τις f^+, f^- ανήκει στον $L^1(\mu)$, τότε η συνολοσυνάρτηση

$$\mu_f(E) = \mu_{f^+}(E) - \mu_{f^-}(E) = \int_E f\, d\mu, \quad E \in \mathcal{A},$$

είναι προσημασμένο μέτρο στο X. Αντιστρόφως, θα δείξουμε ότι κάθε προσημασμένο μέτρο στο X είναι αυτής τής μορφής. Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στο X. Έστω $X = P \cup N$ μιά διάσπαση Hahn για το ν. Θέτουμε $\mu = |\nu|$ και $f = \chi_P - \chi_N$. Τότε για $E \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\int_E f\, d\mu &= \int_E (\chi_P - \chi_N)\, d\nu^+ + \int_E (\chi_P - \chi_N)\, d\nu^- \\
&= \int_E \chi_P\, d\nu^+ - \int_E \chi_N\, d\nu^+ + \int_E \chi_P\, d\nu^- - \int_E \chi_N\, d\nu^- \\
&= \int_E d\nu^+ - \int_E d\nu^- = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \nu(E).
\end{aligned}$$

Η ολοκλήρωση συναρτήσεων ως προς ένα προσημασμένο μέτρο ν ορίζεται με τον προφανή τρόπο: Θέτουμε

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$$

και για $f \in L^1(\nu)$, ορίζουμε

$$\int_X f\, d\nu = \int_X f\, d\nu^+ - \int_X f\, d\nu^-.$$

Τα προσημασμένα μέτρα μπορούμε να τα φανταζόμαστε σαν κατανομές ηλεκτρικών φορτίων (θετικών και αρνητικών) μέσα σε ένα σώμα X. Ο αριθμός $\nu(X)$ είναι το συνολικό φορτίο. Αν $X = P \cup N$ είναι μιά διάσπαση Hahn, το σύνολο P είναι το μέρος τού σώματος X που περιέχει όλα τα θετικά φορτία, ενώ το N περιέχει όλα τα αρνητικά φορτία.

5.6 Ασκήσεις

5.6.1 Έστω $\mathcal{A}$ μιά άλγεβρα στο σύνολο X. Δείξτε ότι $\varnothing \in \mathcal{A}$ και $X \in \mathcal{A}$.

5.6.2 Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο X. Δείξτε ότι αν $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A}$, τότε $\cap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

5.6.3 Δείξτε ότι η τομή μιάς οικογένειας σ-αλγεβρών στο σύνολο X είναι σ-άλγεβρα στο X.

5.6.4 Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μιά άλγεβρα στο X. Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X αν έχει την ιδιότητα:
Αν $E_k \in \mathcal{A},\ \ k \in \mathbb{N}$ και τα E_k είναι ξένα ανά δύο, τότε $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

5.6.5 Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μιά άλγεβρα στο X. Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X αν έχει την ιδιότητα:
Αν $E_k \in \mathcal{A},\ \ k \in \mathbb{N}$ και $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, τότε $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

5.6.6 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Έστω E ένα μη κενό υποσύνολο τού X με $E \neq X$. Βρείτε τη σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\{E\}$.

5.6.7 Αποδείξτε τους ισχυρισμούς που κάναμε στο Παράδειγμα 5.1.11.

5.6.8 Αποδείξτε την Πρόταση 5.1.10.

5.6.9 Δείξτε ότι το μ_p τού Παραδείγματος 5.2.3 είναι πράγματι μέτρο.

5.6.10 Δείξτε ότι το μ τού Παραδείγματος 5.2.4 είναι πράγματι σ-πεπερασμένο μέτρο.

5.6.11 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Έστω F ένα μη κενό σύνολο στην $\mathcal{A}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \mu(A \cap F), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Δείξτε ότι το ν είναι μέτρο στο X. Δείξτε ότι το ν είναι πεπερασμένο μέτρο αν και μόνο αν $\mu(F) < \infty$.

5.6.12 Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Είδαμε στο Παράδειγμα 5.1.5 ότι το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E \ \text{ το πολύ αριθμήσιμο ή } \ E^c \ \text{ το πολύ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα. Ορίζουμε συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ με

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \ E \ \text{ το πολύ αριθμήσιμο,} \\ 1, & \text{αν } \ E^c \ \text{ το πολύ αριθμήσιμο.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο στο X.

5.6.13 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Δείξτε ότι αν $E, F \in \mathcal{A}$, $E \subset F$ και $\mu(E) < \infty$, τότε

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

5.6.14 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Δείξτε ότι για $E, F \in \mathcal{A}$,

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

5.6.15 Δείξτε ότι αν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ είναι μέτρα ορισμένα στην ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, τότε το $\sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j$ είναι επίσης μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{A}$.

5.6.16 Δίνονται χώροι πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j(E)}{2^j}, \quad E \in \mathcal{A}.$$

Δείξτε ότι η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος πιθανότητας.

5.6.17 Θεωρούμε το σύνολο $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Για $E \subset X$, ορίζουμε $\mu(E) = \mathrm{card}(E)/6$. Δείξτε ότι η τριάδα $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ είναι χώρος πιθανότητας.

5.6.18 Έστω E ένα μετρήσιμο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ με $0 < m(E) < \infty$. Έστω $\mathcal{M}_E$ το σύνολο των μετρήσιμων υποσυνόλων τού E. Για $F \in \mathcal{M}_E$, ορίζουμε $\mu(F) = m(F)/m(E)$. Δείξτε ότι η τριάδα $(E, \mathcal{M}_E, \mu)$ είναι χώρος πιθανότητας.

5.6.19 Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Έστω $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ μιά συνάρτηση με τις ιδιότητες:
(I1) $\mu(\varnothing) = 0$,
(I2) Αν $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ και $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, τότε $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.
(α) Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο αν και μόνο αν είναι συνεχές από κάτω· (βλ. Πρόταση 5.2.7).
(β) Αν $\mu(X) < \infty$, δείξτε ότι το μ είναι μέτρο αν και μόνο αν είναι συνεχές από πάνω· (βλ. Πρόταση 5.2.7).

5.6.20 Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Έστω $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ μιά συνάρτηση με τις ιδιότητες:
(I1) $\mu(\varnothing) = 0$.
(I2) Αν $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ και $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, τότε $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.
(I3) Αν $\{E_n\}$ μιά ακολουθία συνόλων τής $\mathcal{A}$, τότε $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.
Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο στο X.

5.6.21 (α) Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε συνάρτηση $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ με

$$\mu(\varnothing) = 0 \quad \text{και} \quad \mu(E) = \sum_{n \in E} a_n, \quad E \neq \varnothing.$$

Δείξτε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο μέτρο στο $\mathbb{N}$.
(β) Έστω $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ χώρος μέτρου. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε για κάθε μη κενό υποσύνολο E τού $\mathbb{N}$, ισχύει $\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n$.

5.6.22 Δίνεται ακολουθία συναρτήσεων $f_n \in L^1(\mu)$ με $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο X. Δείξτε ότι αν το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

5.6.23 Ας είναι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty)$ μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το μέτρο μ_f τού Παραδείγματος 5.4.7. Δείξτε ότι $\mu_f(E) = 0, \ \forall E \in \mathcal{A}$ αν και μόνο αν η f είναι $\sigma.\pi.$ ίση με τη μηδενική συνάρτηση.

5.6.24 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι:
(α) Αν $E, F \in \mathcal{A}$ και $\mu(E \triangle F) = 0$, τότε $\mu(E) = \mu(F)$.
(β) Ορίζουμε $E \sim F$, αν $\mu(E \triangle F) = 0$. Τότε η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{A}$.
(γ) Για $E, F \in \mathcal{A}$, ορίζουμε $\rho(E, F) = \mu(E \triangle F)$. Τότε ισχύει

$$\rho(E, G) \le \rho(E, F) + \rho(F, G).$$

5.6.25 Βρείτε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, ένα σύνολο $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$ και ένα υποσύνολο B τού E με $B \notin \mathcal{A}$.

5.6.26 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ ονομάζεται **ημιπεπερασμένο** αν για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = \infty$, υπάρχει $F \in \mathcal{A}$ με $F \subset E$ και $0 < \mu(F) < \infty$.
(α) Δείξτε ότι κάθε σ-πεπερασμένο μέτρο είναι ημιπεπερασμένο.
(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι ημιπεπερασμένο και αν $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = \infty$, τότε για κάθε $C > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{A}$ με $F \subset E$ και $C < \mu(F) < \infty$.

5.6.27 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu_o : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_o(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E, \ F \in \mathcal{A}, \ \mu(F) < \infty\}.$$

Δείξτε ότι:
(α) Το μ_o είναι ημιπεπερασμένο μέτρο.
(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu = \mu_o$. (Υπόδειξη: Άσκηση 5.6.26(β)).
(γ) Υπάρχει μέτρο ν στο X με τιμές μόνο 0 και ∞ τέτοιο ώστε $\mu = \mu_o + \nu$.

5.6.28 Έστω $\mathcal{A}$ μιά σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Δείξτε ότι αν κάθε συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, τότε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ και αντιστρόφως.

5.6.29 Δίνονται σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο σύνολο X, $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ και θετικός αριθμός k. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } |f(x)| \le k, \\ k, & \text{αν } f(x) > k, \\ -k, & \text{αν } f(x) < -k. \end{cases}$$

είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

5.6.30 Δείξτε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη.

5.6.31 Αν η f είναι φραγμένη και $\mathcal{A}$-μετρήσιμη στο X, δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε $\phi_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο X.

5.6.32 Έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο σύνολο X. Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και η $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη, δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

5.6.33* Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση τού Cantor. Θέτουμε $g(x) = f(x)+x$.
(α) Δείξτε ότι η g απεικονίζει αμφιμονότιμα το $[0,1]$ επί τού $[0,2]$.
(β) Δείξτε ότι η g^{-1} είναι συνεχής στο $[0,2]$.
(γ) Δείξτε ότι αν C είναι το σύνολο του Cantor, τότε $m(g(C)) = 1$.
(δ) Επειδή το σύνολο $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, θα περιέχει ένα μη μετρήσιμο σύνολο A. Δείξτε ότι το σύνολο $g^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο αλλά όχι Borel.
(ε) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση F και συνεχής συνάρτηση G στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η $F \circ G$ δεν είναι μετρήσιμη.

5.6.34 Αν μ_1, μ_2 είναι μέτρα και $f \in L^1(\mu_1) \cap L^1(\mu_2)$, δείξτε ότι $f \in L^1(\mu_1 + \mu_2)$ και

$$\int_X f \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_X f \, d\mu_1 + \int_X f \, d\mu_2.$$

5.6.35 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου. Έστω f μιά $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f^n \, d\mu$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε είναι ίσο με $\mu(\{f = 1\})$.

5.6.36 Δίνονται μέτρο μ στο σύνολο X και συνάρτηση $f \in L^1(\mu)$ με $f > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f^{1/n} \, d\mu = \mu(X).$$

5.6.37 Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ένας χώρος προσημασμένου μέτρου. Έστω $E \in \mathcal{A}$. Δείξτε ότι $|\nu|(E) = 0$ αν και μόνο αν για κάθε $E_1 \subset E$ με $E_1 \in \mathcal{A}$, ισχύει $\nu(E_1) = 0$.

5.6.38 Δείξτε ότι αν ν είναι προσημασμένο μέτρο και μ είναι μέτρο, τότε

$$|\nu| \perp \mu \iff (\nu^+ \perp \mu \text{ και } \nu^- \perp \mu).$$

5.6.39 Βρείτε ένα μέτρο μ στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $m \perp \mu$.

5.6.40 Θεωρούμε το προσημασμένο μέτρο μ_f τού Παραδείγματος 5.5.4 και ένα σύνολο $E \in \mathcal{A}$. Δείξτε ότι το E είναι θετικό σύνολο αν και μόνο αν $f \geq 0$ σ.π. στο E.

5.6.41 Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στο σύνολο X. Δείξτε ότι αν $-\infty < \nu(X) < \infty$, τότε τα μέτρα $|\nu|, \nu^+, \nu^-$ είναι πεπερασμένα.

5.6.42 Δείξτε ότι αν ν είναι ένα προσημασμένο μέτρο και λ, μ είναι μέτρα τέτοια ώστε $\nu = \lambda - \mu$, τότε $\lambda \geq \nu^+$ και $\mu \geq \nu^-$.

5.6.43 Δυό προσημασμένα μέτρα ν_1, ν_2 δεν παίρνουν την τιμή $-\infty$. Δείξτε ότι $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$.
Υπόδειξη: Άσκηση 5.6.42.

5.6.44 Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι αν το ν δεν παίρνει τις τιμές $\infty, -\infty$, τότε είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\forall E \in \mathcal{A}$, $|\nu(E)| \leq M$.

5.6.45 Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Δείξτε ότι:
(α) Αν $\{E_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων τής $\mathcal{A}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

(β) Αν $\{E_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων τής $\mathcal{A}$ και $\nu(E_1) \neq \pm\infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

5.6.46 Έστω μ ο περιορισμός τού μέτρου Lebesgue στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Έστω $f(x) = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$. Για το προσημασμένο μέτρο μ_f, βρείτε τη διάσπαση Hahn, τη διάσπαση Jordan και την ολική μεταβολή.

5.6.47 Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Σωστό ή Λάθος;
(α) Για $E \in \mathcal{A}$, $\nu(E) = 0$ αν και μόνο αν $|\nu|(E) = 0$.
(β) Ένα σύνολο $E \in \mathcal{A}$ είναι και θετικό και αρνητικό αν και μόνο αν $|\nu|(E) = 0$.
(γ) Ένα σύνολο $E \in \mathcal{A}$ είναι θετικό αν και μόνο αν $\nu(E) \geq 0$.
(δ) Ένα θετικό σύνολο δεν έχει κανένα αρνητικό υποσύνολο.
(ε) Αν ένα αρνητικό σύνολο έχει ένα θετικό υποσύνολο A, τότε $\nu(A) = 0$.

5.6.48 Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου. Δείξτε ότι:
(α) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$.
(β) Αν $f \in L^1(\nu)$, τότε

$$\left|\int_X f\, d\nu\right| \leq \int_X |f|\, d|\nu|.$$

(γ) Αν $E \in \mathcal{A}$,

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\left|\int_E f\, d\nu\right| : |f| \leq 1\right\}.$$

5.6.49 Δίνονται χώρος προσημασμένου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \nu)$ και σύνολο $E \in \mathcal{A}$. Δείξτε ότι:

$$\begin{aligned}
\nu^+(E) &= \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subset E\}, \\
\nu^-(E) &= -\inf\{\nu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subset E\}, \\
|\nu|(E) &= \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N},\ E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{A} \quad \text{ξένα}, \quad E = \cup_{j=1}^{n} E_j\right\}.
\end{aligned}$$

5.6.50 Βρείτε ένα χώρο προσημασμένου μέτρου με δύο διαφορετικές διασπάσεις Hahn.

5.7 Σημειώσεις

Ο Lebesgue ανέπτυξε τη θεωρία που φέρει το όνομά του τόσο στην πραγματική ευθεία όσο και σε ευκλείδειους χώρους μεγαλύτερης διάστασης. Η αφηρημένη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης αναπτύχθηκε στη δεκαετία τού 1910 από τους J. Radon, M. Fréchet, K. Καραθεοδωρή, και άλλους. Η θεωρία αυτή βρίσκεται στη βάση τής σύγχρονης Ανάλυσης. Μεταξύ πολλών άλλων εφαμογών της είναι και η αξιωματική θεμελίωση τής θεωρίας Πιθανοτήτων η οποία έγινε από τον A. Kolmogorov το 1933.

Στο κεφάλαιο αυτό κάναμε μόνο μιά σύντομη εισαγωγή στη θεωρία αυτή. Ο αναγνώστης μπορεί να βρεί περισσότερο υλικό σε προπτυχιακό επίπεδο στα βιβλία [6], [10]. Σε μεταπτυχιακό επίπεδο υπάρχει το εξαιρετικό σύγγραμμα τού G. Folland [3].

Βιβλιογραφία

[1] T. Apostol, *Mathematical Analysis*. Second Edition. Addison-Wesley Publ. 1974.

[2] N. L. Carothers, *Real Analysis*. Cambridge Univ. Press 2000.

[3] G. B. Folland, *Real Analysis*. Second Edition, Wiley 1999.

[4] W. J. Kaczor, M.T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I, II, III*. American Mathematical Society 2000.

[5] H. L. Royden, *Real Analysis*. Third Edition. McMillan 1988.

[6] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill 1976.

[7] K. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis*. Wadsworth 1981.

[8] R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral*. Marcel Dekker 1977.

[9] Π. Ξενικάκης, *Πραγματική Ανάλυση*. Δεύτερη Έκδοση. Εκδ. Ζήτη 1999.

[10] Π. Ξενικάκης, *Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης*. Θεσσαλονίκη 1991.

Ευρετήριο