

Μαθηματικό έργο 6

Στο μάθημα των Μαθηματικών Προσανατολισμού στην Γ' Λυκείου μια καθηγήτρια, μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου Όριο- Συνέχεια, είπε στους μαθητές της τάξης της:

«Λέμε ότι μια συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I διάστημα, έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής αν για κάθε α, β στο I και η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, τότε υπάρχει ξ στο (α, β) ώστε $f(\xi) = \eta$. Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών προκύπτει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει την παραπάνω ιδιότητα. Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή, αν μια συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I διάστημα, έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής είναι συνεχής στο I ;»

Τρεις μαθητές απάντησαν ως εξής:

Μαθητής Α: Ναι, γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν μπορεί να έχει διακοπές, αφού σε αυτήν την περίπτωση θα υπήρχε τιμή η την οποία δεν θα έπαιρνε η συνάρτηση σε κανένα x του I .

Μαθητής Β: Όχι, γιατί η διατύπωση του Θ.Ε.Τ δεν είναι ισοδυναμία, είναι σαφώς διατυπωμένο προς την μια κατεύθυνση (αν είναι συνεχής τότε ισχύει το Θ.Ε.Τ).

Μαθητής Γ. Θα ίσχυε αν η συνάρτηση ήταν μονότονη, γιατί τότε θα υπήρχαν τα πλευρικά όρια σε κάθε x του I και τα πλευρικά δεν θα μπορούσαν να είναι διαφορετικά γιατί τότε από την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής η συνάρτηση θα έπρεπε να πάρει τις ενδιάμεσες τιμές. Αυτό όμως θα οδηγούσε σε άτοπο λόγω μονοτονίας.

Ερωτήσεις

α) Σχολιάστε κάθε μια από τις απαντήσεις των μαθητών. Πώς θα απαντούσατε στον κάθε ένα από τους τρεις μαθητές; (εξηγείστε στην κάθε περίπτωση τον τρόπο που θα βοηθούσατε τον μαθητή να κατανοήσει την έννοια αιτιολογώντας την απάντησή σας).

β) Περιγράψτε με ένα σύντομο σχέδιο μαθήματος τον τρόπο που θα επιλέγατε να διδάξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, τεκμηριώνοντας τις επιλογές σας. Να αναφέρετε τα μέσα που θα χρησιμοποιούσατε, όπως δραστηριότητες, προβλήματα, ερωτήματα, παραδείγματα κ.α. Τεκμηριώστε τις διδακτικές επιλογές σας αναφέροντας τους λόγους που θεωρείτε ότι η προσέγγισή σας βοηθάει στην κατανόηση των μαθητών.