

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
658. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2021

Αριστα=10 μονάδες

I. 2 μονάδες Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y'' + \mu y' - (\mu + 1)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Να μετατραπεί σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, του οποίου να ταξινομηθούν τα σημεία ισορροπίας.

II. 2 μονάδες Η κίνηση του απλού εκκρεμούς με απόσβεση περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$x' = y, \quad y' = -y - \sin x. \quad (1)$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ενέργειας

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$$

είναι ασθενής συνάρτηση Lyapunov στο $(0, 0)$ για το σύστημα (1) και να προσδιοριστεί η ευστάθεια του σημείου αυτού.

III. 2 μονάδες Να αποδειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x' = 5x - y - x(8 - x^2 - y^2), \\ y' = x + 5y - y(8 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (2)$$

έχει περιοδική λύση, η οποία να βρεθεί και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης.

IV. 2.5 μονάδες Σε μια κυτταρική μεμβράνη πάχους w η συγκέντρωση μάζας ενός βιοχημικού μορίου είναι c_i στο εσωτερικό του κυττάρου, και c_o στο εξωτερικό του. Η σταθερά διάχυσης στη μεμβράνη είναι d και η ροή των μορίων μέσω μεμβράνης είναι ϕ . Μπορούμε να εικάσουμε ότι ισχύει ένας φυσικός νόμος της μορφής $f(w, c_i, c_o, d, \phi) = 0$. Μια κατάλληλη επιλογή θεμελιωδών μεγεθών είναι οι ποσότητες μήκος (L), χρόνος (T) και μάζα (M), μέσω των οποίων έχουμε $[w] = L$, $[c_i] = [c_o] = ML^{-3}$, $[d] = L^2T^{-1}$, $[\phi] = ML^{-2}T^{-1}$. Να βρεθεί ένας ισοδύναμος φυσικός νόμος που συσχετίζει κατάλληλες αδιάστατες ποσότητες και να εκφραστεί η ροή ϕ μέσω του νόμου αυτού.

V. 2.5 μονάδες Να βρεθεί μια προσέγγιση διαταραχών δύο όρων για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' + y = \varepsilon y y'^2, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

με χρήση της μεθόδου Poincaré-Lindstedt.

(Δίνεται η σχέση: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.)